La teoria della verità di Alfred Tarski

PROLEGOMENI: Contesto Storico e Intellettuale

0.1 La Crisi dei Fondamenti nella Matematica del Primo Novecento

All'inizio del XX secolo, la matematica attraversava una profonda crisi fondazionale. La scoperta dei paradossi nella teoria ingenua degli insiemi (Russell, 1901), l'emergere di antinomie semantiche, e i dibattiti tra formalisti, intuizionisti e logicisti avevano scosso la fiducia nella solidità dei fondamenti matematici.

Il programma di Hilbert mirava a fornire una fondazione finitista e consistente per tutta la matematica. Il Circolo di Vienna perseguiva la chiarificazione del linguaggio scientifico attraverso l'analisi logica. In questo contesto intellettuale fermento, il giovane Alfred Tarski (1901-1983), allievo di Stanisław Leśniewski e Tadeusz Kotarbiński alla Scuola Polacca di Logica, intraprese il suo programma di "semantica scientifica".

0.2 La Scuola Polacca di Logica

La Scuola Polacca, fondata da Kazimierz Twardowski, era caratterizzata da:

Rigore metodologico: Insistenza sull'uso di linguaggi formalizzati e metodi matematici esatti.

Anti-psicologismo: Rigetto di spiegazioni psicologiche dei concetti logici, influenzato da Husserl e Frege.

Interesse semantico: A differenza della tradizione hilbertiana puramente sintattica, i logici polacchi si interessavano di significato, riferimento e verità.

Leśniewski sviluppò sistemi logici alternativi (Prototetica, Ontologia, Mereologia) basati su intuizioni semantiche chiare. Łukasiewicz esplorò logiche polivalenti e la storia della logica. In questo ambiente, Tarski sviluppò la sua teoria della verità tra il 1929 e il 1933.

0.3 Il Problema della Verità prima di Tarski

Prima di Tarski, esistevano diverse concezioni filosofiche della verità:

Teoria della Corrispondenza (Aristotele, Russell, Wittgenstein): Una proposizione è vera se corrisponde ai fatti. Problema: cosa significa esattamente "corrispondere"?

Teoria Coerentista (Hegel, Bradley, Neurath): La verità consiste nella coerenza con un sistema di credenze. Problema: sistemi coerenti ma incompatibili.

Teoria Pragmatista (Peirce, James, Dewey): La verità è ciò che funziona, che è utile, o che convergerà nell'indagine ideale. Problema: confusione tra verità e giustificazione.

Teoria Ridondantista (Ramsey): "È vero che p" significa semplicemente "p". Il predicato di verità è superfluo. Problema: non spiega il ruolo della verità nelle generalizzazioni.

Nessuna di queste teorie forniva una definizione matematicamente rigorosa applicabile ai linguaggi formalizzati della logica moderna.

Parte I: Fondamenti e Motivazioni Filosofiche

1.1 Il Problema della Verità nella Logica Classica

La questione della definizione rigorosa del concetto di verità costituisce uno dei problemi centrali della logica matematica e della filosofia del linguaggio. Prima del lavoro seminale di Alfred Tarski, culminato nella monografia "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen" (1933, tradotta in tedesco dal polacco "Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych", 1933), il concetto di verità era stato oggetto di speculazione filosofica ma mancava di una trattazione formalmente rigorosa che soddisfacesse i requisiti di precisione della matematica moderna.

Il problema fondamentale risiede nell'apparente circolarità di qualsiasi tentativo di definire la verità: per dire che una proposizione è vera, sembra necessario già possedere il concetto di verità. Inoltre, i tentativi ingenui di definire la verità portano inevitabilmente ai paradossi semantici, il più celebre dei quali è il paradosso del mentitore.

Tarski stesso formulò il problema così: "Il desiderio di possedere una definizione corretta e, al tempo stesso, materialmente adeguata del termine 'proposizione vera' è un desiderio naturale e legittimo di ogni persona che usi questo termine con comprensione e che si renda conto del problema della coerenza logica."

1.2 I Paradossi Semantici: Analisi Dettagliata

1.2.1 Il Paradosso del Mentitore

Consideriamo la proposizione λ: "La proposizione λ è falsa". Se λ è vera, allora ciò che essa asserisce è il caso, dunque λ è falsa. Se λ è falsa, allora ciò che essa asserisce non è il caso, dunque λ è vera. Formalmente:

$$V(\lambda) \leftrightarrow \neg V(\lambda)$$

dove V(x) significa "x è vera". Questa è una contraddizione in logica classica, violando il principio di non-contraddizione: $\neg(A \wedge \neg A)$.

Varianti storiche:

Epimenide il Cretese (VI sec. a.C.): "Tutti i Cretesi sono mentitori" detto da un Cretese. Versione imprecisa perché non necessariamente auto-referenziale.

Eubulide di Mileto (IV sec. a.C.): Formulazione esplicita del paradosso nella forma: "Ciò che ora sto dicendo è falso".

Formulazione medievale (Insolubles): "Haec propositio est falsa".

1.2.2 Il Paradosso di Richard

Jules Richard (1905) costruì il seguente paradosso: consideriamo tutte le definizioni di numeri reali formulabili in italiano con meno di 100 parole. Questo insieme è numerabile. Ordiniamolo: d_1, d_2, d_3, ... Definiamo un nuovo numero reale r la cui n-esima cifra decimale differisce dalla n-esima cifra del numero definito da d_n. Per costruzione diagonale, r differisce da tutti i numeri nell'elenco. Ma r è stato definito in italiano con meno di 100 parole, quindi dovrebbe essere nell'elenco. Contraddizione.

Il paradosso rivela problemi nell'uso non-ristretto della nozione di "definibilità".

1.2.3 Il Paradosso di Grelling-Nelson

Kurt Grelling e Leonard Nelson (1908) considerarono aggettivi auto-descriventi: "corto" è corto, "italiano" è italiano, "polisillabico" è polisillabico. Chiamiamo "autologici" questi aggettivi. Gli aggettivi non auto-descriventi ("lungo", "inglese", "monosillabico") sono "eterologici".

Domanda: "eterologico" è autologico o eterologico?

Se "eterologico" è autologico, allora si descrive, quindi è eterologico.
Se "eterologico" è eterologico, allora non si descrive, quindi è autologico.

Contraddizione: E(⌜ eterologico ⌝) ↔ ¬E(⌜ eterologico ⌝)

1.2.4 Il Paradosso di Berry

G.G. Berry (pubblicato da Russell, 1906): Consideriamo "Il più piccolo numero naturale non definibile in italiano con meno di venti parole". Questa frase:

Definisce un numero naturale (assumendo che esista un tale numero)
Contiene meno di venti parole
Per definizione, il numero non può essere definito in italiano con meno di venti parole

Contraddizione.

1.2.5 Struttura Comune dei Paradossi

Tutti questi paradossi condividono caratteristiche:

Auto-riferimento: Una espressione linguistica si riferisce a se stessa direttamente o indirettamente.

Negazione: Contengono una negazione o contraddizione interna.

Universalità: Coinvolgono quantificazione su totalità che includono l'espressione stessa ("tutti", "ogni").

Impredicatività: Definiscono un oggetto facendo riferimento a una totalità che include l'oggetto definito.

Ramsey (1925) distinse tra paradossi logici (come Russell) e paradossi semantici (come il mentitore). I secondi coinvolgono concetti semantici (verità, definibilità, denotazione) e sono specificamente il target della soluzione tarskiana.

1.3 L'Approccio di Tarski: Principi Fondamentali

La soluzione proposta da Tarski si basa su tre principi fondamentali:

1.3.1 Relativizzazione al Linguaggio

Non esiste un concetto assoluto di verità, ma solo verità-in-L per un linguaggio specifico L. Ogni predicato di verità è indicizzato a un linguaggio: V_L, V_L_1, V_L_2, etc.

Questo respinge l'idea di una "verità assoluta" indipendente dal linguaggio. La verità è sempre relativa a:

Un linguaggio specifico con sintassi definita
Un'interpretazione (struttura) per quel linguaggio
Un'assegnazione di valori alle variabili (per formule aperte)

1.3.2 Distinzione Linguaggio-Metalinguaggio

La verità per un linguaggio oggetto L deve essere definita in un metalinguaggio ML che è essenzialmente più ricco di L. Questa gerarchia è cruciale per evitare l'auto-riferimento semantico che genera i paradossi.

Requisiti del metalinguaggio:

ML deve contenere L (o traduzioni di tutte le espressioni di L)
ML deve contenere nomi per tutte le espressioni di L
ML deve avere risorse sufficienti per discutere la sintassi di L
ML deve essere sufficientemente espressivo per definire concetti aritmetici (se L contiene aritmetica)

Tipicamente, se L è del primo ordine, ML è del secondo ordine o contiene teoria degli insiemi.

1.3.3 Adeguatezza Materiale

Qualsiasi definizione di verità deve soddisfare determinati criteri di correttezza che preservino l'intuizione semantica del concetto. Questo è catturato dalla Convenzione T, che vedremo in dettaglio.

1.4 Obiettivi del Programma Tarskiano

Tarski aveva obiettivi espliciti per la sua teoria:

Precisione matematica: Fornire una definizione rigorosa come quelle della matematica pura.

Adeguatezza materiale: Catturare l'intuizione ordinaria di verità-come-corrispondenza.

Consistenza: Evitare tutti i paradossi semantici conosciuti.

Applicabilità: Essere utilizzabile nella pratica logica e matematica.

Generalità: Applicarsi a ogni linguaggio formalizzato (non necessariamente universale).

Parte II: La Convenzione T e l'Adeguatezza Materiale

2.1 La Convenzione T: Formulazione e Analisi

Il criterio di adeguatezza materiale proposto da Tarski è noto come Convenzione T (o Criterio T). Esso stabilisce che una definizione di verità per un linguaggio L è materialmente adeguata se e solo se implica tutte le istanze del seguente schema:

Schema T: X è vera in L se e solo se p

dove:

X è un nome (nel metalinguaggio) di una frase di L
p è la traduzione di quella frase nel metalinguaggio

Gli esempi canonici sono:

"La neve è bianca" è vera se e solo se la neve è bianca.

"2 + 2 = 4" è vera se e solo se 2 + 2 = 4.

"∀x(x = x)" è vera se e solo se ogni oggetto è identico a se stesso.

In notazione più formale, se φ è una formula del linguaggio oggetto L e ⌜ φ ⌝ è il suo nome nel metalinguaggio ML (costruito usando virgolette o codifica gödeliana), allora:

$V_L(⌜ φ ⌝) \leftrightarrow φ^*$

dove $φ^*$ è la traduzione di φ in ML (che può essere semplicemente φ stessa se $L \subseteq ML$).

2.2 Analisi Filosofica dello Schema T

Lo schema T cattura l'intuizione fondamentale che una proposizione è vera se e solo se le cose stanno come la proposizione dice che stanno. Questa apparente tautologia nasconde in realtà una profonda distinzione:

Lato sinistro (menzione): "La neve è bianca" è vera

Opera al livello metalinguistico
Parla *della* frase come oggetto linguistico
Attribuisce una proprietà semantica (verità) a un'espressione

Lato destro (uso): la neve è bianca

Opera al livello oggetto
Usa la frase per descrivere il mondo
Fa un'asserzione sulla realtà extralinguitica

Questa distinzione tra **uso** e **menzione** (use-mention distinction) è cruciale per evitare i paradossi. La confusione tra i due livelli è all'origine del paradosso del mentitore.

2.3 Equivalenze-T (T-sentences)

Un'istanza particolare dello schema T è chiamata "equivalenza-T" o "T-sentence". Per ogni frase φ di L, abbiamo un'equivalenza-T:

(T-φ): V_L(⌜ φ ⌝) ↔ φ

Una definizione di verità per L è materialmente adeguata secondo la Convenzione T se e solo se implica tutte le equivalenze-T per tutte le frasi di L.

Conseguenza importante: Se una teoria T della verità per L implica tutte le equivalenze-T, allora T determina l'estensione del predicato V_L: l'insieme di tutte le frasi vere è univocamente determinato (assumendo bivalenza).

2.4 Forma Materiale vs. Forma Formale della Convenzione T

Tarski distinse due versioni della Convenzione T:

Forma Materiale: Per ogni frase φ di L: V_L(⌜ φ ⌝) ↔ φ deve essere conseguenza della definizione di verità.

Forma Formale: Se L è assiomatizzabile, per ogni assioma φ di L: V_L(⌜ φ ⌝) deve essere dimostrabile nella teoria della verità.

E se φ ⊢_L ψ (ψ è derivabile da φ in L), allora: V_L(⌜ φ ⌝) → V_L(⌜ ψ ⌝) deve essere dimostrabile.

La forma formale è più forte e richiede che la verità preservi le relazioni di derivabilità del linguaggio oggetto.

2.5 Requisiti Specifici per il Metalinguaggio

Perché la Convenzione T possa essere soddisfatta, il metalinguaggio ML deve soddisfare condizioni precise:

R1 (Contenimento): ML deve contenere L, o almeno traduzioni fedeli di tutte le espressioni di L. Se L ⊆ ML direttamente, le traduzioni sono identità. Altrimenti, deve esistere una funzione di traduzione t: L → ML che preserva la struttura logica.

R2 (Nomi): ML deve contenere nomi strutturali per tutte le espressioni di L. Questi possono essere:

Virgolette: ⌜ φ ⌝ per ogni φ in L
Descrizioni strutturali: "la congiunzione di φ e ψ"
Codifica numerica: numeri di Gödel gφh

R3 (Teoria sintattica): ML deve avere risorse per sviluppare la sintassi di L come teoria matematica. Deve poter:

Definire predicati sintattici (è-una-variabile, è-una-formula, è-una-frase)
Definire operazioni sintattiche (sostituzione, concatenazione)
Esprimere fatti strutturali su espressioni di L

R4 (Potenza espressiva): ML deve essere sufficientemente espressivo da formulare la definizione induttiva di soddisfazione/verità. Tipicamente richiede:

Quantificazione su variabili di tipo appropriato
Capacità di definire relazioni per induzione sulla complessità sintattica
Se L contiene quantificatori, ML deve poter quantificare su assegnazioni

R5 (Ricchezza ontologica): Se L è del primo ordine con aritmetica, ML tipicamente richiede:

Aritmetica del secondo ordine, o
Teoria degli insiemi (almeno frammenti di ZFC)

Questo perché la definizione di verità richiede quantificazione su tutte le possibili assegnazioni di valori a variabili, che è intrinsecamente di ordine superiore.

2.6 Perché la Convenzione T non è Circolare

Una critica comune è che la Convenzione T sembra circolare: per verificare che una definizione soddisfa la Convenzione T, dobbiamo verificare che le equivalenze-T siano vere, ma questo sembra richiedere già il concetto di verità.

Risposta di Tarski:

Le equivalenze-T sono nel metalinguaggio: La verità delle equivalenze-T è valutata nel metalinguaggio ML, non in L. Se ML è già compreso, non c'è circolarità.

La Convenzione T è un criterio, non una definizione: Non definisce la verità, ma fornisce un test per valutare definizioni proposte. È analoga a richiedere che una definizione di "numero primo" implici che 2 è primo e 4 non lo è.

La definizione vera è costruttiva: La definizione effettiva (via soddisfazione) è costruita induttivamente senza usare il concetto di verità. La Convenzione T verifica poi che la definizione è adeguata.

Gerarchia non viziosa: La comprensione della verità in ML può derivare da una definizione ancora più precisa in un meta-metalinguaggio MML, e così via. La gerarchia è fondata su L_0, che è interpretato direttamente nella realtà extralinguitica.

2.7 Critiche alla Convenzione T

2.7.1 La Critica di Field: Definizione vs. Riduzione

Hartry Field (1972) sostenne che la definizione di Tarski non è una vera riduzione del concetto di verità perché presuppone concetti semantici non meno problematici:

L'interpretazione I che assegna referenti a termini
La nozione di soddisfacibilità per predicati
La relazione tra linguaggio e realtà

Secondo Field, Tarski non ha "naturalizzato" la verità, non l'ha ridotta a concetti puramente fisici o computazionali. Ha solo ridotto la verità per frasi alla soddisfacibilità per formule atomiche, che è ancora un concetto semantico.

Replica: Tarski non pretendeva una riduzione fisicalista. Il suo obiettivo era una definizione matematicamente rigorosa per linguaggi formalizzati, non una teoria naturalistica della verità per il linguaggio in generale.

2.7.2 La Critica Deflazionista

Alcuni deflazionisti sostengono che la Convenzione T mostra che "vero" è un dispositivo logico privo di contenuto sostanziale. Le equivalenze-T permettono di eliminare il predicato di verità:

Invece di: "Tutte le conseguenze logiche di verità sono vere" Diciamo: $\forall\varphi\forall\psi((\varphi \wedge \varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi)$

Problema: Non possiamo eliminare la verità da generalizzazioni infinite o quando non conosciamo la formula specifica, come in: "Tutto ciò che Galileo disse era vero" $\forall\varphi(\text{Disse}(\text{Galileo}, \varphi) \rightarrow V(\varphi))$

Questo richiede genuina quantificazione su proposizioni e il predicato di verità.

2.7.3 La Critica della Trivialità

Si potrebbe obiettare che la Convenzione T è troppo debole: molte "definizioni" inadeguate la soddisfano. Ad esempio:

$V(\ulcorner \varphi \urcorner) :=$ Dio crede φ

soddisfa lo schema T (assumendo teismo) ma non sembra catturare il concetto di verità.

Replica: La Convenzione T fornisce solo l'adeguatezza materiale, necessaria ma non sufficiente. Una definizione completa deve anche:

Essere formalmente corretta (ben definita matematicamente)
Essere composizionale (costruita induttivamente)
Non presupporre concetti oscuri (come "Dio crede")

Parte III: La Definizione di Verità per Linguaggi Formalizzati

3.1 Il Linguaggio Oggetto: Specifica Completa

Consideriamo un linguaggio formale L del primo ordine classico con identità. La specifica completa richiede precisione su ogni dettaglio sintattico.

3.1.1 Alfabeto del Linguaggio

Simboli logici (fissi, comuni a tutti i linguaggi del primo ordine):

Connettivi: ¬ (negazione), ∧ (congiunzione), ∨ (disgiunzione), → (implicazione), ↔ (bicondizionale)
Quantificatori: ∀ (universale), ∃ (esistenziale)
Identità: = (uguaglianza)
Variabili individuali: un insieme numerabile $\{v_0, v_1, v_2, v_3, ...\}$ o $\{x, y, z, x_1, y_1, z_1, ...\}$
Simboli ausiliari: (,), , (parentesi e virgola)

Simboli non-logici (specifici della firma del linguaggio):

Costanti individuali: un insieme C = $\{c_1, c_2, c_3, ...\}$ (possibilmente vuoto o finito o numerabile)
Simboli di predicato: per ogni n ≥ 1, un insieme P^n = $\{P^n_1, P^n_2, ...\}$ di predicati n-ari
Simboli di funzione: per ogni n ≥ 1, un insieme F^n = $\{f^n_1, f^n_2, ...\}$ di funzioni n-arie

Una **firma** (o **vocabolario**) σ specifica quali simboli non-logici sono nel linguaggio: σ = (C, (P^n)*{n≥1}, (F^n)*{n≥1}).

Il linguaggio L_σ è il linguaggio del primo ordine con firma σ.

3.1.2 Termini: Definizione Induttiva Formale

L'insieme Term_σ dei termini di L_σ è il più piccolo insieme T tale che:

(T1) Se v è una variabile, allora v ∈ T

(T2) Se c ∈ C è una costante, allora c ∈ T

(T3) Se f ∈ F^n è un simbolo di funzione n-ario e $t_1, ..., t_n \in T$ sono termini, allora $f(t_1, ..., t_n) \in T$

Questa è una definizione per induzione, equivalente a:

Term_σ = ∪_{i=0}^∞ T_i

dove:

T_0 = Var ∪ C (variabili e costanti)
T_{i+1} = T_i ∪ $\{f(t_1, ..., t_n) : f \in F^n, t_1, ..., t_n \in T_i\}$

Principio di induzione sui termini: Se P è una proprietà tale che:

P(v) vale per ogni variabile v
P(c) vale per ogni costante c
Se $P(t_1), ..., P(t_n)$ valgono, allora $P(f(t_1, ..., t_n))$ vale

Allora P(t) vale per ogni termine t.

3.1.3 Formule Atomiche

Una **formula atomica** di L_σ è un'espressione della forma:

(At1) $P(t_1, ..., t_n)$ dove $P \in P^n$ è un predicato n-ario e $t_1, ..., t_n \in Term_\sigma$

(At2) $(t_1 = t_2)$ dove $t_1, t_2 \in Term_\sigma$

Notazione: At_σ = insieme delle formule atomiche di L_σ.

3.1.4 Formule: Definizione Induttiva Completa

L'insieme $Form_\sigma$ delle formule (well-formed formulas, wff) di L_σ è il più piccolo insieme F tale che:

(F1) $At_\sigma \subseteq F$ (ogni formula atomica è una formula)

(F2) Se $\varphi \in F$, allora $\neg\varphi \in F$

(F3) Se $\varphi, \psi \in F$, allora $(\varphi \wedge \psi) \in F$

(F4) Se $\varphi, \psi \in F$, allora $(\varphi \vee \psi) \in F$

(F5) Se $\varphi, \psi \in F$, allora $(\varphi \rightarrow \psi) \in F$

(F6) Se $\varphi, \psi \in F$, allora $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in F$

(F7) Se $\varphi \in F$ e v è una variabile, allora $\forall v\, \varphi \in F$

(F8) Se $\varphi \in F$ e v è una variabile, allora $\exists v\, \varphi \in F$

Convenzioni sintattiche:

Omettiamo parentesi esterne: $\varphi \wedge \psi$ invece di $(\varphi \wedge \psi)$
Associatività: $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ significa $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$ o $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$ (non importa per la semantica)
Precedenza: $\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \leftrightarrow$
Abbreviazioni: $\forall x \forall y\, \varphi$ per $\forall x(\forall y\, \varphi)$, etc.

Principio di induzione sulle formule: Se P è una proprietà tale che:

P(α) vale per ogni formula atomica α
Se $P(\varphi)$ vale, allora $P(\neg\varphi)$ vale
Se $P(\varphi)$ e $P(\psi)$ valgono, allora $P(\varphi \wedge \psi)$, $P(\varphi \vee \psi)$, $P(\varphi \rightarrow \psi)$, $P(\varphi \leftrightarrow \psi)$ valgono
Se $P(\varphi)$ vale, allora $P(\forall v\, \varphi)$ e $P(\exists v\, \varphi)$ valgono per ogni variabile v

Allora $P(\varphi)$ vale per ogni formula φ.

3.1.5 Complessità, Sottoformule, Termini Occorrenti

Complessità: La complessità $c(\varphi)$ di una formula φ è definita induttivamente:

$c(\varphi) = 0$ se φ è atomica
$c(\neg\varphi) = c(\varphi) + 1$
$c(\varphi \circ \psi) = \max(c(\varphi), c(\psi)) + 1$ per $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
$c(Qv\, \varphi) = c(\varphi) + 1$ per $Q \in \{\forall, \exists\}$

Sottoformule: L'insieme Sub(φ) delle sottoformule di φ:

Sub(α) = {α} se α è atomica
Sub(¬φ) = {¬φ} ∪ Sub(φ)
Sub(φ ○ ψ) = {φ ○ ψ} ∪ Sub(φ) ∪ Sub(ψ)
Sub(Qv φ) = {Qv φ} ∪ Sub(φ)

3.2 Variabili Libere e Vincolate: Analisi Rigorosa

3.2.1 Definizioni Precise

Una occorrenza di una variabile v in una formula φ è **vincolata** se appare in una sottoformula della forma Qv ψ (dove Q ∈ {∀, ∃}). Altrimenti l'occorrenza è **libera**.

Formalmente, definiamo l'insieme FV(φ) delle variabili libere di φ:

FV(P(t_1, ..., t_n)) = Var(t_1) ∪ ... ∪ Var(t_n) (variabili occorrenti nei termini)
FV(t_1 = t_2) = Var(t_1) ∪ Var(t_2)
FV(¬φ) = FV(φ)
FV(φ ○ ψ) = FV(φ) ∪ FV(ψ)
FV(Qv φ) = FV(φ) \ {v}

dove Var(t) è l'insieme delle variabili occorrenti nel termine t.

Una **frase** (sentence) è una formula senza variabili libere: FV(φ) = ∅.

3.2.2 Sostituzione e Sostituibilità

La sostituzione è un'operazione sintattica cruciale. φ[t/v] denota la formula ottenuta sostituendo ogni occorrenza libera di v in φ con il termine t.

Definizione induttiva di φ[t/v]:

P(t_1, ..., t_n)[t/v] = P(t_1[t/v], ..., t_n[t/v])
(t_1 = t_2)[t/v] = (t_1[t/v] = t_2[t/v])
(¬φ)[t/v] = ¬(φ[t/v])
(φ ○ ψ)[t/v] = (φ[t/v] ○ ψ[t/v])
(Qw φ)[t/v] = Qw(φ[t/v]) se w ≠ v
(Qv φ)[t/v] = Qv φ (nessuna sostituzione perché v è vincolata)

Un termine t è **sostituibile per v in φ** (notation: t sub_v φ) se nessuna variabile libera di t diventa vincolata quando t sostituisce v in φ.

Formalmente: t sub_v φ sse per ogni w ∈ FV(t) e ogni sottoformula Qw ψ di φ, l'occorrenza di v in ψ (se esiste) non è libera oppure è al di fuori del campo di Qw.

Esempio di non-sostituibilità: φ = ∃y(x < y) t = y φ[y/x] = ∃y(y < y) ✗ (errato: y viene catturata)

Soluzione: rinominare la variabile vincolata (α-conversione): φ ≡_α ∃z(x < z) φ[y/x] = ∃z(y < z) ✓

3.3 Strutture e Interpretazioni: Fondamenti Model-Teorici

3.3.1 Definizione di Struttura

Una **σ-struttura** (o σ-modello) M per un linguaggio L_σ è una coppia:

M = ⟨D^M, I^M⟩

dove:

(D) Dominio: D^M (o |M|) è un insieme non vuoto chiamato universo, dominio o carrier set. Gli elementi di D^M sono gli individui del modello.

(I) Funzione di interpretazione: I^M (o semplicemente ·^M) è una funzione che assegna:

Per ogni costante c ∈ C: I^M(c) = c^M ∈ D^M

Per ogni predicato n-ario P ∈ P^n: I^M(P) = P^M ⊆ (D^M)^n

Interpretato come: P^M è l'insieme delle n-uple che soddisfano P

Per ogni simbolo di funzione n-ario f ∈ F^n: I^M(f) = f^M: (D^M)^n → D^M

Una funzione totale sul dominio

Notazione: Scriveremo spesso M = ⟨D, c^M, P^M, f^M, ...⟩ elencando le interpretazioni esplicitamente.

3.3.2 Esempi Fondamentali di Strutture

Esempio 3.1 (Aritmetica Naturale Standard): $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times, < \rangle$

dove:

D^ℕ = {0, 1, 2, 3, ...} (numeri naturali)
0^ℕ = 0 (zero)
S^ℕ(n) = n + 1 (successore)
+^ℕ, ×^ℕ (addizione e moltiplicazione usuali)
<^ℕ = {(m,n) : m < n} (ordine naturale)

Esempio 3.2 (Modello Non-Standard): $M = \langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, 0, S', +', \times', <' \rangle$

con $\infty \notin \mathbb{N}$ e:

S'(∞) = ∞
n +' ∞ = ∞ +' n = ∞
n <' ∞ per ogni n ∈ ℕ

Questo modello soddisfa gli assiomi di Peano ma non è isomorfo a ℕ.

Esempio 3.3 (Teoria degli Insiemi): $V = \langle V_\omega, \in \rangle$

dove V_ω è la gerarchia cumulativa fino a ω e ∈ è la relazione di appartenenza.

Esempio 3.4 (Grafo): $G = \langle V, E \rangle$

dove V è un insieme di vertici e $E \subseteq V \times V$ è la relazione di adiacenza.

3.3.3 Assegnazioni

Una **assegnazione** (o **valutazione**) in M è una funzione:

s: Var → D^M

che assegna a ogni variabile un elemento del dominio.

Notazione per assegnazioni modificate:

s[v/d]: Var → D^M è l'assegnazione definita da:

sv/d = { d se w = v { s(w) se w ≠ v

È l'assegnazione che differisce da s solo nell'assegnare d a v.

Generalizzazione: $s[v_1/d_1, ..., v_n/d_n]$ modifica s in n variabili simultaneamente.

3.4 Valutazione dei Termini

Prima di definire la verità delle formule, definiamo il valore dei termini.

Definizione: La funzione di valutazione val^M_s: Term_σ → D^M è definita induttivamente:

(Val1) val^M_s(v) = s(v) per ogni variabile v

(Val2) val^M_s(c) = c^M per ogni costante c

(Val3) $val^M_s(f(t_1, ..., t_n)) = f^M(val^M_s(t_1), ..., val^M_s(t_n))$

Notazione: Scriveremo spesso t^M[s] invece di val^M_s(t), o semplicemente t[s] quando M è chiaro dal contesto.

Proprietà fondamentali della valutazione:

Lemma 3.1 (Dipendenza dalle variabili libere): Se $s_1(v) = s_2(v)$ per ogni $v \in Var(t)$, allora $val^M_{s_1}(t) = val^M_{s_2}(t)$.

Lemma 3.2 (Sostituzione e valutazione): val^M_s(t[u/v]) = val^M_{s[v/val^M_s(u)]}(t)

Dimostrazione: Per induzione sulla struttura di t.

Caso base (t = v): val^M_s(v[u/v]) = val^M_s(u) = val^M_{s[v/val^M_s(u)]}(v)

Caso base (t = w ≠ v): val^M_s(w[u/v]) = val^M_s(w) = s(w) = sv/val^M_s(u)

Caso induttivo (t = f(t_1, ..., t_n)): val^M_s(f(t_1, ..., t_n)[u/v]) = val^M_s(f(t_1[u/v], ..., t_n[u/v])) = f^M(val^M_s(t_1[u/v]), ..., val^M_s(t_n[u/v])) = f^M(val^M_{s[v/val^M_s(u)]}(t_1), ..., val^M_{s[v/val^M_s(u)]}(t_n)) [per HI] = val^M_{s[v/val^M_s(u)]}(f(t_1, ..., t_n)) ■

3.5 La Relazione di Soddisfazione: Definizione Centrale

Il concetto fondamentale nella semantica tarskiana non è la verità ma la **soddisfacibilità** (satisfaction, Erfüllung): una relazione tra formule, strutture e assegnazioni.

Definizione 3.3 (Soddisfazione): Data una struttura M e un'assegnazione s, la relazione "M e s soddisfano φ", scritta:

M ⊨_s φ o M ⊨[s] φ o (M, s) ⊨ φ

è definita per induzione sulla complessità di φ:

Base dell'induzione (formule atomiche):

(S-Pred) $M \models_s P(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow \langle val^M_s(t_1), ..., val^M_s(t_n)\rangle \in P^M$

(S-Eq) $M \models_s (t_1 = t_2) \Leftrightarrow val^M_s(t_1) = val^M_s(t_2)$

Passo induttivo (connettivi logici):

(S-¬) $M \models_s \neg\varphi \Leftrightarrow$ non $M \models_s \varphi$

(S-∧) $M \models_s (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow M \models_s \varphi$ e $M \models_s \psi$

(S-∨) $M \models_s (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow M \models_s \varphi$ o $M \models_s \psi$

(S-→) $M \models_s (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow$ non $M \models_s \varphi$ oppure $M \models_s \psi$

Equivalentemente: se M ⊨_s φ allora M ⊨_s ψ

(S-↔) $M \models_s (\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (M \models_s \varphi \Leftrightarrow M \models_s \psi)$

Quantificatori:

(S-∀) $M \models_s \forall v\, \varphi$ sse *per ogni* $d \in D^M$, M $[s[v/d]]$ φ

(S-∃) $M \models_s \forall v\, \varphi$ sse *esiste* $d \in D^M$ *tale che* M $[s[v/d]]$ φ

3.6 Analisi Dettagliata della Definizione

3.6.1 Verifiche di Buona Definizione

Teorema 3.4: La definizione di ⊨_s è ben posta, cioè esiste un'unica relazione che soddisfa le clausole (S-Pred)-(S-∃).

Dimostrazione: Per il principio di definizione per induzione (ricorsione). Poiché la complessità di φ è ben fondata (ogni formula ha complessità finita), esiste un'unica funzione che assegna a ogni formula φ un valore di verità {⊤, ⊥} secondo le clausole date. ■

3.6.2 Composizionalità Semantica

La definizione di Tarski è **composizionale**: il valore semantico di una formula complessa dipende solo dai valori semantici delle sue componenti immediate e dalla sua struttura logica.

Questo ha conseguenze profonde:

Apprendibilità: Comprendere finiti schemi ricorsivi permette di comprendere infinite formule
Produttività: Possiamo costruire e comprendere formule mai incontrate
Sistematicità: Formule strutturalmente simili hanno semantiche correlate

3.6.3 Trattamento dei Quantificatori

Il trattamento tarskiano dei quantificatori è obiettivistico: ∀x φ è vero se φ è vero per tutti gli oggetti nel dominio, indipendentemente dalla nostra capacità di verificarlo.

Contrasto con interpretazioni alternative:

Intuizionismo: ∀x φ è vero se abbiamo una costruzione che prova φ per ogni x
Free Logic: I quantificatori vanno solo su oggetti esistenti, non su tutto il dominio

3.7 Proprietà Fondamentali della Soddisfazione

3.7.1 Invarianza per Assegnazioni Equivalenti

Teorema 3.5 (Lemma di Coincidenza): Se s_1 e s_2 coincidono su FV(φ) (cioè $s_1(v) = s_2(v)$ per ogni $v \in FV(\varphi)$), allora:

$M \models_{s_1} \varphi \Leftrightarrow M \models_{s_2} \varphi$

Dimostrazione: Per induzione sulla complessità di φ.

Base: Se φ è atomica $P(t_1, ..., t_n)$, allora $FV(\varphi) = Var(t_1) \cup ... \cup Var(t_n)$. Per il Lemma 3.1, $val^M_{s_1}(t_i) = val^M_{s_2}(t_i)$ per ogni i. Quindi: $M \models_{s_1} P(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow \langle val^M_{s_1}(t_1), ..., val^M_{s_1}(t_n)\rangle \in P^M \Leftrightarrow \langle val^M_{s_2}(t_1), ..., val^M_{s_2}(t_n)\rangle \in P^M \Leftrightarrow M \models_{s_2} P(t_1, ..., t_n)$

Passo: Casi per connettivi sono immediati per ipotesi induttiva.

Caso ∀v φ: $FV(\forall v\, \varphi) = FV(\varphi) \setminus \{v\}$. Dobbiamo mostrare: $M \models_{s_1} \forall v\, \varphi \Leftrightarrow M \models_{s_2} \forall v\, \varphi$

$M \models_{s_1} \forall v\, \varphi \Leftrightarrow \forall d \in D^M: M \models_{s_1[v/d]} \varphi$

Ora, $s_1[v/d]$ e $s_2[v/d]$ coincidono su FV(φ) perché:

Per $w \neq v$: $s_1[v/d](w) = s_1(w) = s_2(w) = s_2[v/d](w)$ (usando $s_1 =_{FV(\forall v\, \varphi)} s_2$)
Per $w = v$: $s_1[v/d](v) = d = s_2[v/d](v)$

Quindi per HI: $M \models_{s_1[v/d]} \varphi \Leftrightarrow M \models_{s_2[v/d]} \varphi$ per ogni d.

Dunque: $\forall d \in D^M: M \models_{s_1[v/d]} \varphi \Leftrightarrow M \models_{s_2} \forall v\, \varphi$ ■

Corollario 3.6: Per frasi (formule senza variabili libere), la soddisfacibilità non dipende dall'assegnazione:

Se FV(φ) = ∅, allora per ogni s, s': M ⊨$_s$ φ ⇔ M ⊨{s'} φ

Questo giustifica la notazione M ⊨ φ per frasi.

3.7.2 Il Lemma di Sostituzione

Teorema 3.7 (Lemma di Sostituzione): Se t è sostituibile per v in φ, allora:

M ⊨$_s$ $\varphi[t/v]$ ⇔ M ⊨{s[v/val^M_s(t)]} φ

Dimostrazione: Per induzione sulla complessità di φ.

Base (φ atomica $P(t_1, \ldots, t_n)$): M ⊨$_s$ $P(t_1, \ldots, t_n)[t/v]$ ⇔ M ⊨$_s$ $P(t_1[t/v], \ldots, t_n[t/v])$ ⇔ ⇔$val^M_s(t_1[t/v]), \ldots, val^M_s(t_n[t/v])$⇔ ⇔ P^M ⇔ ⇔$val^M\{s[v/val^M_s(t)]\}(t_1), \ldots, val^M$\{s[v/val^M_s(t)]\}($t_n$)⟩ ∈ P^M [Lemma 3.2] ⇔ M ⊨_{s[v/val^M_s(t)]} $P(t_1, \ldots, t_n)$

Passo induttivo per connettivi: diretto per HI.

Caso cruciale ∀w φ con w ≠ v (se w = v non c'è sostituzione):

M ⊨$_s$ $(\forall w\ \varphi)[t/v]$ ⇔ M ⊨$_s$ $\forall w(\varphi[t/v])$ ⇔ ⇔d ∈ D^M: M ⊨{$s[w/d]$} $\varphi[t/v]$ ⇔ ⇔d ∈ D^M: M ⊨{s[w/d][v/val^M_{s[w/d]}(t)]} φ [per HI]

Ora, per la condizione di sostituibilità, w ∉ FV(t), quindi: val^M_{s[w/d]}(t) = val^M_s(t)

E s[w/d][v/val^M_s(t)] = s[v/val^M_s(t)][w/d] (le modifiche commutano perché w ≠ v).

Quindi: ∀d ∈ D^M: M ⊨$_{s[v/val^M_s(t)][w/d]}$ φ ⇔ M ⊨{s[v/val^M_s(t)]} ∀w φ ■

Questo lemma è fondamentale per connettere sintassi (sostituzione) e semantica (variazione di assegnazione).

3.8 La Definizione di Verità

Definizione 3.8 (Verità): Una formula φ è **vera** in una struttura M, scritto:

M ⊨ φ

se e solo se φ è soddisfatta in M da ogni assegnazione:

$M \models \varphi \Leftrightarrow_{def} \forall s: \mathrm{Var} \to D^M, M \models_s \varphi$

Per frasi (FV(φ) = ∅), la definizione si semplifica:

$M \models \varphi \Leftrightarrow M \models_s \varphi$ per una (e quindi ogni) assegnazione s

Quindi per frasi possiamo parlare di verità senza ambiguità.

Definizione 3.9 (Falsità): φ è **falsa** in M se ¬φ è vera:

$M \models \neg\varphi$

Equivalentemente, se nessuna assegnazione soddisfa φ.

Definizione 3.10 (Teoria di una struttura): L'insieme di tutte le frasi vere in M è chiamato la **teoria** di M:

$Th(M) = \{\varphi : \varphi \text{ è una frase e } M \models \varphi\}$

Th(M) è un insieme completo e consistente di frasi che descrive completamente M dal punto di vista del primo ordine.

3.9 Verifica della Convenzione T

Verifichiamo esplicitamente che la definizione di Tarski soddisfa la Convenzione T.

Teorema 3.11 (Adeguatezza della Definizione): Per ogni frase φ di L_σ:

$M \models \varphi \iff \varphi$ è il caso in M

Più precisamente, la definizione implica tutte le istanze dello schema T.

Esempio 3.12: Consideriamo la frase $\varphi = \forall x\, P(x)$ nel linguaggio con un predicato unario P.

Per la definizione di Tarski: $M \models \forall x\, P(x) \iff \forall s: M \models_s \exists x\, P(x) \iff \exists s\, \exists d \in D^M: M \models \{s[x/d]\}\, P(x) \iff \forall d \in D^M: d \in P^M \iff P^M = D^M \iff$ Ogni oggetto nel dominio ha la proprietà P

Quindi: "$\forall x\, P(x)$" è vera in M ⟺ Ogni oggetto in D^M ha la proprietà P

Questo è esattamente un'istanza dello schema T: il lato sinistro menziona la frase, il lato destro usa la frase per descrivere la struttura.

Esempio 3.13: Formula più complessa $\varphi = \exists x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$

$M \models \varphi \iff \exists d \in D^M\ \forall e \in D^M$: se $(d,e) \in R^M$ allora $(e,d) \in R^M \iff$ Esiste un oggetto d tale che per ogni oggetto e, se d è R-relato a e, allora e è R-relato a d

Di nuovo, abbiamo: "$\exists x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$" è vera in M ⟺ (condizione sulla struttura)

3.10 Conseguenza Logica e Validità

Definizione 3.14 (Conseguenza Logica): Una frase ψ è **conseguenza logica** di un insieme Γ di frasi, scritto:

$\Gamma \models \psi$

se e solo se per ogni struttura M: Se $M \models \varphi$ per ogni $\varphi \in \Gamma$, allora $M \models \psi$

In simboli: $\forall M(\forall \varphi \in \Gamma: M \models \varphi) \rightarrow M \models \psi)$

Definizione 3.15 (Validità): Una frase φ è **valida** (o **logicamente vera**) se è vera in ogni struttura:

$\models \varphi \Leftrightarrow_{def} \forall M: M \models \varphi$

Notazione: $\models \varphi$ significa $\emptyset \models \varphi$.

Definizione 3.16 (Soddisfacibilità): Un insieme Γ di frasi è **soddisfacibile** se esiste un modello:

$\exists M\ \forall \varphi \in \Gamma: M \models \varphi$

Γ è **insoddisfacibile** se non è soddisfacibile.

Teorema 3.17 (Relazioni fondamentali):

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile
$\models \varphi \Leftrightarrow \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile
Γ è soddisfacibile $\Leftrightarrow \Gamma \not\models \bot$ (dove $\bot$ è una contraddizione)

Parte IV: Proprietà Metalogiche Avanzate della Verità Tarskiana

4.1 Composizionalità: Analisi Dettagliata

Definizione 4.1 (Composizionalità): Una funzione semantica $[\![\cdot]\!]$ è **composizionale** se il valore di $[\![\varphi]\!]$ dipende solo dai valori di $[\![\psi]\!]$ per ψ sottoformule immediate di φ e dalla struttura di φ.

Teorema 4.2: La semantica tarskiana è pienamente composizionale.

Dimostrazione: Immediata dalla definizione induttiva. Per esempio:

$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{M}_{s} = \top \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]^{M}_{s} = \top$ e $[\![\psi]\!]^{M}_{s} = \top$

dove $[\![\varphi]\!]^{M}_{s} = \top$ sse $M \models_{s} \varphi$. ■

Importanza filosofica:

Principio di Frege: Il significato del tutto dipende dal significato delle parti e dal modo in cui sono combinate.

Apprendibilità Finita: Un essere con capacità finite può apprendere regole finite e comprendere infinite formule.

Produttività: Possiamo comprendere formule mai incontrate prima applicando regole composizionali.

Sistematicità: Se comprendiamo "P(a) ∧ Q(b)", comprendiamo anche "Q(b) ∧ P(a)", "P(a) ∨ Q(b)", etc.

4.2 Teoremi di Omogeneità e Invarianza

Teorema 4.3 (Omogeneità): Se h: M → N è un omomorfismo di strutture e φ è una formula senza ∃, ∨, allora:

Se M ⊨*s φ, allora N* ⊨{h∘s} φ

dove (h∘s)(v) = h(s(v)).

Teorema 4.4 (Preservazione per Isomorfismi): Se h: M → N è un isomorfismo, allora per ogni formula φ:

M ⊨*s φ* ⇔ *N* ⊨{h∘s} φ

Corollario 4.5: Strutture isomorfe soddisfano esattamente le stesse frasi:

$M \cong N \Longrightarrow \mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$

Questo mostra che la logica del primo ordine non può distinguere strutture isomorfe: è invariante per isomorfismi.

4.3 Teoremi di Löwenheim-Skolem

Teorema 4.6 (Löwenheim-Skolem Discendente): Se Γ ha un modello infinito, allora Γ ha un modello numerabile.

Teorema 4.7 (Löwenheim-Skolem Ascendente): Se Γ ha un modello infinito, allora per ogni cardinalità κ ≥ |L_σ|, Γ ha un modello di cardinalità κ.

Conseguenza filosofica: Non possiamo categoricamente caratterizzare strutture infinite non-numerabili con logica del primo ordine. Ad esempio, gli assiomi di ZFC hanno modelli numerabili (paradosso di Skolem) anche se uno di essi afferma l'esistenza di insiemi non numerabili.

4.4 Compattezza

Teorema 4.8 (Compattezza Semantica): Un insieme Γ di frasi è soddisfacibile se e solo se ogni sottoinsieme finito di Γ è soddisfacibile:

$\Gamma \text{ è soddisfacibile} \Leftrightarrow \forall \Gamma_0 \subseteq_{\text{fin}} \Gamma\colon \Gamma_0 \text{ è soddisfacibile}$

Dimostrazione (Schema): Usa il teorema di compattezza della logica proposizionale e la tecnica degli ultrafilter (teorema di compattezza di Los).

Applicazioni:

Esistenza di modelli non-standard: $\mathbb{N}$ ha modelli non-isomorfi (con "infiniti" elementi).

Teoria dei colori di grafi: Un grafo infinito è k-colorabile sse ogni suo sottografo finito lo è.

Estensioni conservative: Se T ∪ {φ} è inconsistente, allora T_0 ∪ {φ} è inconsistente per qualche T_0 ⊆_fin T.

4.5 Completezza e Correttezza

Definizione 4.9 (Sistema Deduttivo): Un sistema deduttivo $\vdash$ per L consiste di assiomi e regole di inferenza che permettono di derivare frasi da altre frasi.

$\Gamma \vdash \varphi$ significa "φ è derivabile da Γ nel sistema".

Teorema 4.10 (Correttezza - Soundness): Se $\Gamma \vdash \varphi$, allora $\Gamma \vDash \varphi$.

Ogni teorema derivabile è semanticamente valido.

Teorema 4.11 (Completezza - Gödel 1930): Se $\Gamma \vDash \varphi$, allora $\Gamma \vdash \varphi$.

Ogni conseguenza semantica è derivabile.

Corollario 4.12: $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi$

Sintassi e semantica coincidono perfettamente per la logica del primo ordine.

Importanza: Questo risultato straordinario mostra che:

La nozione semantica tarskiana di verità è "catturata" sintatticamente
Esiste un calcolo completo per la logica del primo ordine
Possiamo meccanicamente generare tutte le verità logiche (sebbene il processo sia non-decidibile)

4.6 Indecidibilità

Teorema 4.13 (Church-Turing 1936): L'insieme delle frasi valide della logica del primo ordine è ricorsivamente enumerabile ma non ricorsivo (non decidibile).

Non esiste algoritmo che, data una formula arbitraria φ, determini se $\vDash \varphi$.

Contrasto: La logica proposizionale è decidibile (metodo delle tavole di verità).

Conseguenza: Non possiamo meccanicamente verificare la verità di tutte le affermazioni matematiche formalizzate in primo ordine.

4.7 Definibilità

Definizione 4.14 (Insieme Definibile): Un insieme $X \subseteq (D^M)^n$ è **definibile** (senza parametri) in M se esiste una formula $\varphi(v_1, ..., v_n)$ tale che:

$X = \{\langle d_1, ..., d_n\rangle : M \vDash \varphi[v_1/d_1, ..., v_n/d_n]\}$

X è **definibile con parametri** se φ può contenere costanti interpretate.

Teorema 4.15 (Limiti della Definibilità): In strutture infinite, non tutti i sottoinsiemi sono definibili. Ad esempio, in $(\mathbb{N}, +, \times)$, solo insiemi ricorsivamente enumerabili o co-ricorsivamente enumerabili sono definibili con formule Σ_1 o Π_1.

4.8 Teorema di Beth

Teorema 4.16 (Teorema di Definibilità di Beth): Se una teoria T definisce implicitamente un simbolo di relazione R (cioè determina univocamente la sua estensione), allora R è esplicitamente definibile in T.

Più precisamente: Se per ogni due modelli M_1, M_2 di T che differiscono solo nell'interpretazione di R, necessariamente R^{M_1} = R^{M_2}, allora esiste φ(x_1, ..., x_n) in L \ {R} tale che:

$T \vdash \forall x_1 ... \forall x_n (R(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n))$

Parte V: Limiti Intrinseci e Indefinibilità della Verità

5.1 Il Teorema di Indefinibilità di Tarski: Enunciato e Contesto

Uno dei risultati più profondi e sorprendenti della teoria di Tarski è negativo: dimostra che la verità non può essere definita all'interno di certi linguaggi sufficientemente espressivi.

Teorema 5.1 (Indefinibilità di Tarski 1933): Sia L un linguaggio del primo ordine che contiene l'aritmetica di Peano PA. Non esiste una formula V(x) di L tale che per ogni frase φ di L:

$PA \vdash \varphi \leftrightarrow V(\ulcorner \varphi \urcorner)$

dove $\ulcorner \varphi \urcorner$ è un termine di L (numerale) che denota il numero di Gödel di φ.

In altre parole: **Il predicato di verità per L non è aritmeticamente definibile in L**.

5.2 Aritmetizzazione della Sintassi

Per dimostrare il teorema, dobbiamo prima aritmetizzare la sintassi, cioè codificare le espressioni sintattiche come numeri naturali.

Codifica di Gödel: Assegniamo a ogni simbolo del linguaggio un numero:

- $\neg \mapsto 1$
- $\wedge \mapsto 2$
- $\vee \mapsto 3$
- $\rightarrow \mapsto 4$
- $\forall \mapsto 5$
- $\exists \mapsto 6$
- $= \mapsto 7$
- $(\mapsto 8$
- $) \mapsto 9$
- $v_0 \mapsto 10$, $v_1 \mapsto 11$, $v_2 \mapsto 12$, ...
- costanti, predicati, funzioni: numeri successivi

Una sequenza finita $\langle n_1, n_2, ..., n_k \rangle$ viene codificata come:

gφh = 2^{n_1} × 3^{n_2} × 5^{n_3} × ... × p_k^{n_k}

dove p_i è l'i-esimo numero primo.

Proprietà cruciali:

Iniettività: Espressioni diverse hanno codici diversi
Decidibilità: Possiamo verificare algoritmicamente se n è un codice valido
Aritmeticità: Predicati sintattici sono aritmeticamente definibili

Ad esempio, Form(x) = "x è il codice di una formula" è definibile in PA.

5.3 Il Lemma Diagonale

Lemma 5.2 (Lemma Diagonale di Gödel-Carnap): Per ogni formula φ(x) con una variabile libera x, esiste una frase D (detta punto fisso di φ) tale che:

PA ⊢ D ↔ φ(⌜ D ⌝)

Dimostrazione (Schema):

Definiamo la funzione diag: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che mappa il codice di ψ(x) al codice di ψ(⌜ ψ(x) ⌝):

diag(n) = { gψ(⌜ ψ(x) ⌝)h se n = gψ(x)h per qualche formula ψ(x) { 0 altrimenti

Questa funzione è aritmeticamente definibile (computable), quindi rappresentabile in PA: esiste Diag(x,y) tale che:

$\mathrm{PA} \vdash \forall x \exists! y\ \mathrm{Diag}(x,y) \text{ e } \mathrm{diag}(n) = m \iff \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Diag}(\bar{n}, \bar{m})$

Consideriamo ora la formula:

θ(x) := ∃y(Diag(x,y) ∧ φ(y))

Sia k = gθ(x)h il codice di θ(x). Definiamo:

D := θ(k̄) = ∃y(Diag(k̄,y) ∧ φ(y))

Allora:

PA ⊢ D ↔ ∃y(Diag(k̄,y) ∧ φ(y)) ↔ Diag(k̄, gθ(k̄)h) ∧ φ(gθ(k̄)h) ↔ φ(gDh) ↔ φ(⌜ D ⌝)

Quindi D è un punto fisso di φ. ■

Interpretazione: Il lemma mostra che possiamo costruire frasi auto-referenziali in PA. D "dice" (codificatamente) "φ vale per il mio codice".

5.4 Dimostrazione del Teorema di Indefinibilità

Dimostrazione del Teorema 5.1:

Supponiamo per assurdo che esista V(x) in L tale che per ogni frase φ:

PA ⊢ φ ↔ V(⌜ φ ⌝)

Consideriamo la formula ¬V(x). Per il Lemma Diagonale, esiste una frase λ tale che:

PA ⊢ λ ↔ ¬V(⌜ λ ⌝)

La frase λ "dice" (nel senso gödeliano): "Io non sono vera".

Caso 1: Supponiamo PA ⊢ λ.

Allora λ è vera in $\mathbb{N}$ (il modello standard, assumendo la correttezza di PA).

Per l'adeguatezza ipotetica di V: PA ⊢ V(⌜ λ ⌝)

Ma PA ⊢ λ ↔ ¬V(⌜ λ ⌝), quindi PA ⊢ ¬V(⌜ λ ⌝)

Contraddizione: PA ⊢ V(⌜ λ ⌝) e PA ⊢ ¬V(⌜ λ ⌝), quindi PA è inconsistente.

Caso 2: Supponiamo PA ⊢ ¬λ.

Allora ¬λ è vera in $\mathbb{N}$, quindi λ è falsa in $\mathbb{N}$.

Per l'adeguatezza di V: PA ⊢ ¬V(⌜ λ ⌝)

Ma PA ⊢ λ ↔ ¬V(⌜ λ ⌝), quindi PA ⊢ λ

Contraddizione: PA ⊢ λ e PA ⊢ ¬λ.

Caso 3: PA ⊬ λ e PA ⊬ ¬λ (λ è indipendente).

Se PA è corretta e ω-consistente, allora:

> λ è vera in $\mathbb{N}$ sse PA ⊬ λ (per la costruzione)
> Se λ è vera in $\mathbb{N}$, allora V(⌜ λ ⌝) dovrebbe essere vera in $\mathbb{N}$
> Ma PA ⊢ λ ↔ ¬V(⌜ λ ⌝), quindi ¬V(⌜ λ ⌝) sarebbe vera
> Contraddizione

In tutti i casi otteniamo una contraddizione. Quindi non può esistere una tale formula V(x). ■

5.5 Versioni Alternative e Rafforzamenti

Teorema 5.3 (Forma Semantica): Sia M un modello di PA. Non esiste insieme X ⊆ $\mathbb{N}$ definibile in M tale che:

X = {gφh : φ è una frase vera in M}

Teorema 5.4 (Tarski-Mostowski): In teoria degli insiemi ZFC, non esiste formula V(x) tale che per ogni frase φ del linguaggio della teoria degli insiemi:

ZFC ⊢ φ ↔ V(⌜ φ ⌝)

Teorema 5.5 (Gerarchia di Verità): Per ogni n, esiste un predicato V_n(x) che definisce la verità per formule Σ_n dell'aritmetica, ma:

V_n è definibile da una formula Σ_{n+1}
V_n non è definibile da alcuna formula Σ_n o Π_n

5.6 Conseguenze Filosofiche Profonde

5.6.1 Gerarchia Essenziale

La distinzione tra linguaggio oggetto e metalinguaggio non è un mero artificio tecnico, ma riflette un **limite intrinseco** dell'espressività.

Non esiste un "metalinguaggio universale" che possa servire come metalinguaggio per se stesso. Ogni linguaggio sufficientemente espressivo da contenere aritmetica e auto-riferimento non può contenere il proprio predicato di verità.

5.6.2 Verità vs. Dimostrabilità

Il teorema di indefinibilità è intimamente connesso ai teoremi di incompletezza di Gödel:

Primo Teorema di Gödel: Se T è ricorsivamente assiomatizzabile, coerente ed estende PA, allora esiste G_T tale che né G_T né ¬G_T è dimostrabile in T.

Connessione: Se potessimo definire la verità in T, potremmo definire anche la dimostrabilità (T ⊢ φ implica φ è vera). Ma Prov_T(x) è definibile in T, quindi avremmo una definizione di verità, contraddizione.

La verità (semantica) trascende la dimostrabilità (sintattica):

Th(ℕ) ⊋ {φ : PA ⊢ φ}

Ci sono verità aritmetiche non dimostrabili in PA (come la frase di Gödel G_PA).

5.6.3 Semantica vs. Sintassi

Esiste una differenza **di principio** tra:

Nozioni semantiche (verità, soddisfazione, riferimento)
Nozioni sintattiche (dimostrabilità, derivabilità, teorema)

Le nozioni sintattiche sono "effettive" (computabili), mentre le nozioni semantiche trascendono la computabilità.

5.6.4 Il Problema del Fondamento

Se ogni definizione di verità richiede un metalinguaggio più ricco, come evitiamo una regressione infinita?

Risposta di Tarski: La gerarchia è **fondata**:

$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_\omega \subset L_{\omega+1} \subset ...$

L_0 è interpretato direttamente nella realtà (ostensione, pratica linguistica)
V_0 (verità per L_0) è definito in L_1

V_1 è definito in L_2
...
V_ω è definito in L_{ω+1}

La fondazione ultima è **extralinguitica**: la relazione tra L_0 e il mondo non è mediata linguisticamente.

Critica: Questo sposta il problema ma non lo risolve completamente. Come comprendiamo L_0 senza un metalinguaggio?

5.7 La Gerarchia Tarskiana: Analisi Dettagliata

Per ogni ordinale α, possiamo definire:

L_α: Linguaggio di livello α

V_α: Predicato di verità per L_α, definibile in L_{α+1}

Proprietà della gerarchia:

Inclusione: L_α ⊂ L_{α+1} per ogni α

Cumulatività: V_α ∈ L_{α+1} \ L_α

Non-collasso: Non esiste β tale che ∪_{α<ω} L_α = L_β

Completezza relativa: Ogni frase di L_α ha un valore di verità definito in L_{α+1}

Incompletezza assoluta: Non esiste L_∞ tale che ogni frase di ogni L_α abbia valore di verità in L_∞ e L_∞ non richieda ulteriori meta-livelli

Struttura Ordinale:

L_0: Linguaggio oggetto base
L_ω = ∪_{n<ω} L_n: Chiusura numerabile
L_{ω+1}: Primo livello trans-finito
L_{ω_1}: Chiusura non-numerabile
...

Questa gerarchia transfinita è necessaria per trattare linguaggi infinitari e logiche di ordine superiore.

5.8 Tentativi di Superamento

5.8.1 Teorie della Verità Assiomatiche

Invece di definire la verità, possiamo assiomatizzarla. Aggiungiamo a PA un nuovo predicato V(x) con assiomi:

Schema T: Per ogni φ, aggiungi l'assioma: φ ↔ V(⌜ φ ⌝)

Problema: Questo genera inconsistenza (come dimostrato sopra).

Soluzione parziale: Restringere lo schema T a formule che non contengono V.

KF (Kripke-Feferman): Sistema con V(x) e assiomi parziali che evita paradossi ma non è completo.

5.8.2 Logiche Paraconsistenti

LP (Logic of Paradox - Priest): Accetta che alcune frasi siano sia vere che false.

Usa tre valori: T (solo vero), F (solo falso), B (entrambi).

Il paradosso del mentitore λ riceve valore B: è sia vero che falso.

PAC (Paraconsistent Arithmetic): Estende PA con verità paraconsistente.

5.8.3 Gap Theories

Kleene K_3: Alcune frasi non sono né vere né false.

λ riceve valore N (gap): né vero né falso.

Supervaluation (van Fraassen): φ è vera se vera in tutte le precisificazioni, falsa se falsa in tutte, indefinita altrimenti.

5.8.4 Revision Theory

Gupta-Belnap: La valutazione della verità è un processo iterativo.

Partiamo da una ipotesi iniziale h_0: $\mathbb{N} \to \{T, F\}$ e iteriamo:

h_{n+1}(⌜ φ ⌝) = T sse φ è vera secondo h_n

Se la sequenza converge a un punto fisso h*, questo definisce la verità.

Per alcuni λ (come il mentitore), la sequenza oscilla e non converge: λ non ha valore di verità stabile.

Parte VI: Estensioni e Generalizzazioni della Teoria

6.1 Verità per Linguaggi di Ordine Superiore

6.1.1 Logica del Secondo Ordine

Un linguaggio del secondo ordine L^2 permette:

Variabili del primo ordine: x, y, z, ...
Variabili del secondo ordine: X, Y, Z, ... (su insiemi/proprietà)
Quantificazione su variabili del secondo ordine: ∀X φ, ∃X φ

Semantica Standard:

Una struttura M per L^2 è M = ⟨D, I⟩ come prima.

Un'assegnazione s assegna:

s(x) ∈ D per variabili del primo ordine
s(X) ⊆ D^n per variabili del secondo ordine n-arie

Soddisfazione:

$M \vDash_s X(t_1, ..., t_n) \iff \langle val^M_s(t_1), ..., val^M_s(t_n)\rangle \in s(X)$

M ⊨$_s$ ∀X φ ⟺ *per ogni* $S \subseteq D^n$, $M \vDash_{s[X/S]} \varphi$

Proprietà:

Categoricità: Gli assiomi del secondo ordine per $\mathbb{N}$ sono categorici (caratterizzano $\mathbb{N}$ a meno di isomorfismi)

Incompletezza: Non esiste sistema deduttivo completo per la logica del secondo ordine (Gödel)

Potenza espressiva: Molte nozioni non esprimibili nel primo ordine lo sono nel secondo (finitezza, connessione in grafi, buon ordinamento)

6.1.2 Teoria dei Tipi

Nella teoria dei tipi (Russell, Church), abbiamo una gerarchia di tipi:

Tipo 0: Individui
Tipo 1: Proprietà di individui (D → {T, F})
Tipo 2: Proprietà di proprietà ((D → {T, F}) → {T, F})
...

Ogni variabile ha un tipo, e φ(x) è ben formata solo se x ha il tipo appropriato per φ.

Semantica: Un modello assegna:

Un insieme D (tipo 0)
L'insieme delle funzioni D → {T, F} (tipo 1)
L'insieme delle funzioni (D → {T, F}) → {T, F} (tipo 2)
...

La verità è definita induttivamente rispettando i tipi.

Vantaggio: Evita i paradossi tramite stratificazione rigida.

Svantaggio: Meno espressiva della teoria degli insiemi, restrittiva.

6.2 Verità per Linguaggi Infinitari

6.2.1 L_{κλ}: Linguaggi con Operazioni Infinite

L_{κλ} permette:

Congiunzioni di cardinalità < κ: ⋀_{i∈I} φ_i con |I| < κ
Disgiunzioni di cardinalità < κ: ⋁_{i∈I} φ_i
Quantificazione su < λ variabili: $\forall v_1 ... \forall v_\alpha$ φ con α < λ

L_{ωω} = logica del primo ordine (congiunzioni e quantificazioni finite)

$L_{\omega_1\omega}$ = congiunzioni e disgiunzioni numerabili, quantificazione finita

L_{∞∞} = operazioni di qualsiasi cardinalità

Semantica per $L_{\omega_1\omega}$:

$M \models_s \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \iff M \models_s \varphi_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$

$M \models_s \bigvee_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i \iff M \models_s \varphi_i$ per qualche $i \in \mathbb{N}$

Proprietà di $L_{\omega_1\omega}$:

Compattezza fallisce: Un insieme può essere insoddisfacibile anche se ogni sottoinsieme finito è soddisfacibile

Löwenheim-Skolem fallisce: Possiamo assiomatizzare categoricamente $\mathbb{N}$

Maggiore espressività: Possiamo definire chiusura transitiva, accessibilità in grafi

Esempio: "R è ben fondata":

$\forall X(\exists x\, X(x) \rightarrow \exists x(X(x) \wedge \forall y(R(y,x) \rightarrow \neg X(y))))$

Questa formula del secondo ordine può essere approssimata in $L_{\omega_1\omega}$.

6.3 Verità e Logiche Non-Classiche

6.3.1 Logica Intuizionista: Semantica di Kripke

Un **frame di Kripke** è $K = \langle W, \leq \rangle$ dove:

W è un insieme di "mondi" o "stadi"
≤ è un preordine (riflessivo, transitivo) interpretato come "accessibilità" o "estensione informazionale"

Un **modello di Kripke** è $K = \langle W, \leq, D, V \rangle$ dove:

D: W → Sets assegna un dominio a ogni mondo, con D(w) ⊆ D(w') se w ≤ w'
V: W → (Atoms → {T, F}) valuta atomi, con monotonicità: se w ≤ w' e V(w)(P(ā)) = T, allora V(w')(P(ā)) = T

Relazione di forcing K, w ⊩ φ:

$K, w \Vdash P(t_1, ..., t_n) \iff V(w)(P(val_w(t_1), ..., val_w(t_n))) = T$

$K, w \Vdash \varphi \wedge \psi \iff K, w \Vdash \varphi \text{ e } K, w \Vdash \psi$

$K, w \Vdash \varphi \vee \psi \iff K, w \Vdash \varphi \text{ o } K, w \Vdash \psi$

$K, w \Vdash \varphi \to \psi \iff \forall w' \geq w(K, w' \Vdash \varphi \implies K, w' \Vdash \psi)$

$K, w \Vdash \neg\varphi \iff \forall w' \geq w(K, w' \nVdash \varphi)$

$K, w \Vdash \forall x\ \varphi \iff \forall w' \geq w\ \forall d \in D(w')(K, w' \Vdash \varphi[x/d])$

$K, w \Vdash \exists x\ \varphi \iff \exists d \in D(w)(K, w \Vdash \varphi[x/d])$

Proprietà:

Monotonicità: Se K, w ⊩ φ e w ≤ w', allora K, w' ⊩ φ

Fallimento del terzo escluso: Non vale sempre K, w ⊩ φ ∨ ¬φ

Fallimento della doppia negazione: K, w ⊩ ¬¬φ non implica K, w ⊩ φ

Interpretazione filosofica: w rappresenta uno "stato di conoscenza". φ → ψ è vero in w se in ogni estensione della conoscenza dove φ diventa noto, anche ψ lo diventa.

6.3.2 Logica Modale

Linguaggio modale L_□: aggiunge operatori □ ("necessariamente") e ◇ ("possibilmente") alla logica classica.

Frame modale: $F = \langle W, R \rangle$ dove:

W = insieme di mondi possibili
R ⊆ W × W = relazione di accessibilità

Modello modale: $M = \langle W, R, V \rangle$ dove $V: W \to (Atoms \to \{T, F\})$

Semantica:

$M, w \vDash P \iff V(w)(P) = T$

$M, w \vDash \neg\varphi \iff M, w \nvDash \varphi$

$M, w \vDash \varphi \wedge \psi \iff M, w \vDash \varphi \text{ e } M, w \vDash \psi$

$M, w \vDash \Box\varphi \iff \forall w'(wRw' \implies M, w' \vDash \varphi)$

$$M, w \vDash \Diamond\varphi \iff \exists w'(wRw' \land M, w' \vDash \varphi)$$

Sistemi modali differiscono per proprietà di R:

K: Nessuna condizione su R
T: R riflessiva ($\Box\varphi \rightarrow \varphi$)
S4: R riflessiva e transitiva ($\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$)
S5: R equivalenza ($\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$)

Interpretazioni:

Logica alethica: $\Box$ = necessariamente, $\Diamond$ = possibilmente
Logica epistemica: $\Box$ = sa che, $\Diamond$ = compatibile con ciò che si sa
Logica deontica: $\Box$ = obbligatorio, $\Diamond$ = permesso
Logica temporale: $\Box$ = sempre in futuro, $\Diamond$ = qualche volta in futuro

6.3.3 Logiche Polivalenti

Nelle logiche polivalenti, le formule possono avere più di due valori di verità.

Logica Trivalente di Łukasiewicz L_3:

Valori: V = {1, 1/2, 0} (vero, indeterminato, falso)

Operatori:

$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$
$v(\varphi \land \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$
$v(\varphi \lor \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$
$v(\varphi \rightarrow \psi) = \min(1, 1 - v(\varphi) + v(\psi))$

Logica di Kleene K_3:

Stessi valori, ma:

$v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ se $v(\varphi) \leq v(\psi)$, altrimenti $v(\psi)$

Logica infinito-valente:

V = [0, 1] (intervallo reale)

Logica Fuzzy:

v: Formule $\rightarrow$ [0, 1]

$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$
$v(\varphi \land \psi) = \min(v(\varphi), v(\psi))$ o $v(\varphi) \cdot v(\psi)$
$v(\varphi \lor \psi) = \max(v(\varphi), v(\psi))$
$v(\forall x\, \varphi) = \inf\{v(\varphi[x/d]) : d \in D\}$
$v(\exists x\, \varphi) = \sup\{v(\varphi[x/d]) : d \in D\}$

Applicazioni: Ragionamento con incertezza, vaghe predicati ("alto", "caldo"), teoria dei sistemi fuzzy.

6.4 Verità Parziale e Semantica Trivalente

In contesti dove l'informazione è incompleta, alcune formule possono non avere valore di verità definito.

Valutazione parziale: v: Form → {T, F, U} dove U = "undefined"

Logiche three-valued differiscono nel trattamento di U:

Strong Kleene (K_3):

$U \wedge T = U \wedge F = U \wedge U = U$
$U \vee T = T$, $U \vee F = U$, $U \vee U = U$
$U \to T = T$, $U \to F = U$, $U \to U = U$
$T \to U = U$, $F \to U = T$

Weak Kleene (W_3):

Se uno degli input è U, l'output è U (propagazione totale)

Logica di Łukasiewicz ($Ł_3$):

Come definito sopra con valori numerici {1, 1/2, 0}

Supervaluationism (van Fraassen):

φ è:

Vera se vera in tutte le precisazioni (completamenti bivalenti)
Falsa se falsa in tutte le precisazioni
Indefinita altrimenti

Esempio: "Giovanni è calvo" può essere indefinita se Giovanni ha un numero di capelli borderline. In alcune precisazioni del predicato "calvo", la frase è vera; in altre, falsa.

6.5 Verità in Teoria dei Modelli

6.5.1 Elementare Equivalenza e Bi-Simulazione

Definizione 6.1: M e N sono **elementarmente equivalenti**, scritto $M \equiv N$, se:

$Th(M) = Th(N)$

cioè, soddisfano esattamente le stesse frasi del primo ordine.

Proprietà:

$M \cong N \implies M \equiv N$ (isomorfismo implica equivalenza elementare)
L'inverso non vale: $(\mathbb{N}, <) \equiv (\mathbb{N} \cup \{\omega\}, <^*)$ ma non sono isomorfi

Teorema 6.2 (Criterion di Equivalenza Elementare): M ≡ N sse per ogni formula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ e ogni $\bar{a} \in M^n$, $\bar{b} \in N^n$:

$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{b})$

per qualche corrispondenza tra elementi.

6.5.2 Immersioni Elementari

Definizione 6.3: Un'immersione f: M → N è **elementare**, scritto f: M ≼ N, se per ogni formula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ e ogni $\bar{a} \in M^n$:

$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(\bar{a}))$

Test di Tarski-Vaught: $N \succeq M$ (M è sottostruttura elementare di N) sse:

Per ogni $\varphi(x, \bar{y})$ e ogni $\bar{a} \in M$: se $N \models \exists x\, \varphi(x, \bar{a})$, allora esiste $b \in M$ tale che $N \models \varphi(b, \bar{a})$

Cioè, ogni esistenziale soddisfacibile in N con parametri da M ha un testimone in M.

6.5.3 Tipi e Saturazione

Definizione 6.4: Un **n-tipo** su M è un insieme massimale consistente $p(v_1, ..., v_n)$ di formule con parametri da M.

p è **realizzato** in $N \supseteq M$ se esiste $\bar{a} \in N^n$ tale che $N \models \varphi(\bar{a})$ per ogni $\varphi \in p$.

Definizione 6.5: M è **κ-saturo** se ogni n-tipo su $A \subset M$ con $|A| < \kappa$ è realizzato in M.

Teorema 6.6 (Esistenza di Modelli Saturi): Ogni teoria completa ha modelli κ-saturi per ogni κ.

Modelli saturi sono "ricchi" e hanno buone proprietà di chiusura.

6.5.4 Categoricità

Definizione 6.7: Una teoria completa T è **κ-categorica** se tutti i modelli di T di cardinalità κ sono isomorfi.

Teorema 6.8 (Morley): Se T è una teoria completa in un linguaggio numerabile, e T è κ-categorica per qualche κ non numerabile, allora T è κ-categorica per ogni κ non numerabile.

Esempi:

- **DLO** (ordini lineari densi senza estremi): $\aleph_0$-categorica
- **ACF_p** (campi algebricamente chiusi di caratteristica p): non categorica in $\aleph_0$, ma categorica in ogni cardinalità non numerabile
- **RCF** (campi reali chiusi): non categorica

6.6 Teoria dei Modelli Finiti

La semantica tarskiana si applica anche a strutture finite, ma con proprietà diverse.

Differenze chiave:

Compattezza fallisce: Esiste T dove ogni sottoinsieme finito ha un modello finito, ma T non ha modello finito.

Esempio: T = {$\exists \geq_n x$: "esistono almeno n elementi distinti" per ogni n}

Löwenheim-Skolem fallisce: Non possiamo sempre trovare modelli finiti di cardinalità prescritta.

Incompletezza: Molte proprietà finite non sono esprimibili nel primo ordine.

Teorema 6.9 (Trakhtenbrot 1950): L'insieme delle frasi del primo ordine soddisfacibili finitamente (che hanno un modello finito) non è ricorsivamente enumerabile.

Contrasto: L'insieme delle frasi soddisfacibili (in qualsiasi modello) è ricorsivamente enumerabile.

Teorema 6.10: Le seguenti proprietà NON sono esprimibili nel primo ordine:

Finitezza
Connessione (per grafi)
Essere un ordine ben fondato
Parità (avere un numero pari di elementi)

Zero-One Law: Per certe classi di strutture (es. grafi), ogni frase del primo ordine ha probabilità 0 o 1 su strutture casuali di dimensione $n \to \infty$.

6.7 Logica Astratta e Teoremi di Lindström

Definizione 6.11: Una **logica astratta** L è data da:

Un insieme di L-formule con sintassi definita
Una relazione di soddisfacibilità $\models^L$ tra strutture e formule
Nozioni di conseguenza logica, validità, etc.

Proprietà desiderabili:

Compattezza: $\Gamma \models^L \varphi$ sse $\Gamma_0 \models^L \varphi$ per qualche $\Gamma_0 \subseteq_{fin} \Gamma$
Löwenheim-Skolem: Se Γ ha un modello infinito, ne ha uno numerabile

Teorema 6.12 (Lindström 1969): La logica del primo ordine è la **logica più forte** che soddisfa compattezza e Löwenheim-Skolem discendente.

Più precisamente: Se L è una logica che:

Estende il primo ordine
Soddisfa compattezza
Soddisfa Löwenheim-Skolem discendente

Allora L ha la stessa espressività del primo ordine.

Conseguenza: Non possiamo migliorare il primo ordine senza perdere compattezza o Löwenheim-Skolem.

Teorema 6.13 (Lindström - variante): Il primo ordine è la logica più forte che è:

Compatta
Ha un sistema deduttivo completo

Parte VII: Verità, Riferimento e Teoria del Significato

7.1 Verità e Teoria del Significato: Il Programma di Davidson

Donald Davidson (1967) propose che una teoria tarskiana della verità per un linguaggio L possa servire come teoria del significato per L.

Idea centrale: Comprendere una frase φ significa sapere le sue condizioni di verità. Una teoria che sistematicamente assegna condizioni di verità a tutte le frasi di L fornisce il significato di quelle frasi.

Requisiti per una teoria del significato:

1. **Finitudine**: Deve avere un numero finito di assiomi/regole (poiché i parlanti hanno capacità cognitive finite)

2. **Composizionalità**: Il significato di frasi complesse deve derivare composizionalmente dal significato delle parti

3. **Interpretatività**: Deve essere teoricamente possibile verificarla empiricamente basandosi sul comportamento linguistico

Una teoria tarskiana della verità soddisfa (1) e (2) per costruzione. Davidson sostiene che soddisfa anche (3): osservando quali frasi i parlanti accettano in quali circostanze, possiamo confermare o disconfermare ipotesi sulle condizioni di verità.

Interpretazione Radicale: Immaginiamo un antropologo che cerca di interpretare una lingua completamente sconosciuta. Osserva:

- Quali frasi i parlanti nativi proferiscono
- In quali circostanze le proferiscono
- Il loro comportamento non-linguistico

Usando il **Principio di Carità** (attribuiamo credenze per lo più vere e razionali), l'interprete costruisce ipotesi sulla forma: "Il nativo tiene-vera φ in circostanza C". Se φ è vera in C, questo conferma l'ipotesi.

Gradualmente, l'interprete costruisce una teoria-T che assegna condizioni di verità sistematicamente, e questa teoria costituisce una teoria del significato.

7.2 Critiche al Programma Davidsoniano

7.2.1 Il Problema dell'Intensionalità

Obiezione: Le equivalenze-T preservano estensione ma non intensione. Consideriamo:

"La neve è bianca" è vera ⟺ la neve è bianca "La neve è bianca" è vera ⟺ l'erba è verde

Se accidentalmente neve bianca e erba verde co-esistono sempre, le due equivalenze hanno lo stesso valore di verità, ma intuitivamente non catturano lo stesso significato.

Risposta (Davidson): La teoria del significato deve fornire tutte le equivalenze-T, non solo quelle accidentalmente vere. La struttura sistematica della teoria, non le singole equivalenze, cattura il significato.

7.2.2 Il Problema della Verità

Obiezione (Foster 1976): Per usare una teoria-T come teoria del significato, dobbiamo già sapere che la teoria è vera (che le equivalenze-T sono corrette). Ma questo richiede già comprensione del linguaggio oggetto.

Risposta: La teoria-T non presuppone comprensione del linguaggio oggetto, ma è verificabile empiricamente osservando comportamento linguistico. È una teoria empirica, non una definizione analitica.

7.2.3 Componenti Non-Fattuali del Significato

Obiezione: Il significato include più delle condizioni di verità:

- **Modo** (force): Asserzione vs. domanda vs. comando
- **Implicature**: Ciò che è implicato ma non detto
- **Presupposizioni**: Condizioni di felicità
- **Tono emotivo**: Connotazioni

Risposta: Davidson concentra sulla semantica delle asserzioni. Altri aspetti del significato richiedono teorie pragmatiche aggiuntive, ma le condizioni di verità sono il nucleo semantico.

7.3 Verità e Riferimento

La semantica tarskiana coinvolge crucialmente il **riferimento**: la relazione tra espressioni linguistiche e oggetti nel mondo.

Gerarchia semantica:

1. **Termini singolari** (nomi, costanti) → **Oggetti**: c^M ∈ D^M
2. **Predicati → Insiemi/Proprietà**: P^M ⊆ D^M (estensione) o P^M: D^M → {T, F} (caratteristica)
3. **Formule → Valori di verità**: ⟦φ⟧^M ∈ {T, F}

Domanda filosofica: Cosa fonda la relazione di riferimento? Perché "neve" si riferisce alla neve e non all'erba?

Teoria Causale del Riferimento (Kripke, Putnam):

- I nomi propri si riferiscono tramite catene causali di trasmissione
- "Aristotele" si riferisce ad Aristotele perché c'è una catena causale dal nostro uso al battesimo iniziale
- Non tramite descrizioni definite (Russell)

Teoria Descrittiva (Frege, Russell):

- "Aristotele" si riferisce a "il filosofo maestro di Alessandro Magno"
- Il riferimento è mediato da descrizioni (senso)

Teoria dell'Uso (Wittgenstein II):

- Il riferimento è costituito dalle pratiche d'uso nella comunità linguistica
- "Il significato è l'uso"

Tarski non prende posizione su queste controversie metafisiche. La sua teoria assume che il riferimento sia dato (via interpretazione I) e definisce verità a partire da quello.

7.4 Il Problema dello Scetticismo Semantico

Argomento scettico (derivato da Quine, Putnam):

1. La semantica tarskiana richiede una interpretazione I: Simboli → Mondo
2. Interpretazioni diverse possono rendere vere le stesse frasi (indeterminatezza della traduzione, relatività ontologica)
3. Esempio: Possiamo reinterpretare "coniglio" come "parte-temporale-di-coniglio" o "coniglità-non-istanziata" e preservare tutte le verità osservazionali
4. Non c'è "fatto della materia" che determina quale interpretazione è "quella vera"
5. Quindi la semantica è radicalmente indeterminata

Risposte:

Realismo Semantico: C'è un'interpretazione intesa oggettiva, anche se epistemicamente non accessibile definitivamente.

Deflazionismo: Il problema è pseudo-problema. L'interpretazione "corretta" è semplicemente quella usata dalla comunità.

Pragmatismo: L'interpretazione corretta è quella che meglio sistematizza la pratica linguistica e facilita la comunicazione.

7.5 Verità e Teoria della Conoscenza

7.5.1 Verità come Norma Epistemica

La verità tarskiana gioca un ruolo normativo nell'epistemologia:

Principio: Dovremmo credere ciò che è vero e non credere ciò che è falso.

Ma c'è un gap tra verità e giustificazione:

- Possiamo essere giustificati nel credere falsità (illusioni percettive, inganni)
- Ci sono verità che non possiamo conoscere (proposizioni indipendenti, limiti cognitivi)

Teorie del Valore della Verità:

Veritismo Semplice: La verità è il solo bene epistemico fondamentale.

Pluralismo: Comprensione, coerenza, semplicità sono beni epistemici indipendenti.

Pragmatismo: L'utilità delle credenze è più fondamentale della verità.

7.5.2 Internalismo vs. Esternalismo

Internalismo: La giustificazione deve essere cognitivamente accessibile. Le condizioni di verità tarskiane (che possono trascendere l'evidenza) non sono sufficienti per la conoscenza.

Esternalismo (Reliabilismo): La credenza è giustificata se prodotta da processi affidabili che tendono a generare credenze vere. La verità tarskiana fornisce lo standard di affidabilità.

Verità e Giustificazione:

- **Gettier (1963)**: Credenza vera giustificata non è sufficiente per conoscenza
- Servono condizioni aggiuntive anti-fortuna/causali
- Ma la verità (tarskiana) rimane componente necessaria

7.6 Verità nei Linguaggi Naturali

7.6.1 Sfide dei Linguaggi Naturali

Applicare la semantica tarskiana ai linguaggi naturali affronta ostacoli:

1. Ambiguità: "La banca è chiusa" (istituzione finanziaria vs. riva del fiume)

Soluzione: Disambiguazione contestuale. Ogni lettura ha proprie condizioni di verità.

2. Vaghezza: "Giovanni è calvo", "Il rosso è un colore"

Soluzione: Logiche fuzzy, supervaluationism, semantica epistemica (vaghezza come ignoranza)

3. Indicali e Dimostrativi: "Io sono qui ora"

Soluzione: Semantica di Kaplan: carattere (funzione da contesto a contenuto) vs. contenuto (condizioni di verità)

4. Presupposizioni: "Il re di Francia è calvo" presuppone l'esistenza del re di Francia

Soluzione: Logica trivalente, teoria delle presupposizioni di Strawson/van Fraassen

5. Implicature Conversazionali: "Ho mangiato qualcosa" implica (ma non asserisce) "non ho mangiato tutto"

Soluzione: Distinguere semantica (condizioni di verità) da pragmatica (implicature)

6. Metafora e Linguaggio Non-Letterale: "Giulietta è il sole"

Soluzione: Semantica letterale + teoria pragmatica della metafora. Letteralmente falso ma pragmaticamente informativo.

7.6.2 Grammatica di Montague

Richard Montague (1970) sviluppò una semantica formale per frammenti dell'inglese basata su principi tarskiani.

Idea chiave: Trattare il linguaggio naturale come linguaggio formale con sintassi e semantica rigorosa.

PTQ (Proper Treatment of Quantification in Ordinary English):

Sintassi: Categorie sintattiche (S: frasi, NP: sintagmi nominali, VP: verbi, CN: nomi comuni)

Regole di formazione:

- S1: Se $\alpha \in NP$ e $\delta \in VP$, allora $F_1(\alpha, \delta) \in S$ "Giovanni corre" = F_1(Giovanni, corre)
- S2: Se $\delta \in VP$ e $\gamma \in CN$, allora $F_2(\delta, \gamma) \in NP$ "ogni uomo" = F_2(ogni, uomo)

Semantica: Ogni categoria ha tipo semantico:

- e: tipo degli individui
- t: tipo dei valori di verità
- $\langle e,t \rangle$: tipo delle proprietà (funzioni $D \to \{T,F\}$)
- $\langle \langle e,t \rangle,t \rangle$: tipo dei quantificatori

Interpretazione:

$[\![\text{Giovanni}]\!] \in D$ (individuo)

$[\![\text{corre}]\!]: D \to \{T,F\}$ (proprietà)

$[\![\text{ogni uomo}]\!]: (D \to \{T,F\}) \to \{T,F\}$ (quantificatore generalizzato)

$[\![\text{ogni uomo}]\!](P) = T \Leftrightarrow \forall d \in [\![\text{uomo}]\!]: P(d) = T$

Regola semantica:

$[\![F_1(\alpha, \delta)]\!] = [\![\delta]\!]([\![\alpha]\!])$

"Giovanni corre" è vero $\Leftrightarrow [\![\text{corre}]\!]([\![\text{Giovanni}]\!]) = T$

Quantificatori come relazioni tra insiemi:

$[\![\text{ogni}]\!](A)(B) = T \Leftrightarrow A \subseteq B$ $[\![\text{qualche}]\!](A)(B) = T \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ $[\![\text{nessun}]\!](A)(B) = T \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

"Ogni uomo corre": $[\![\text{uomo}]\!] \subseteq [\![\text{corre}]\!]$

Questo approccio generalizza Tarski ai linguaggi naturali mantenendo composizionalità rigorosa.

7.6.3 Semantica di Kaplan per Indicali

David Kaplan (1989) distinse due livelli semantici per trattare indicali ("io", "qui", "ora"):

Carattere: Funzione da contesti a contenuti χ: Contexti → Contenuti

Contenuto: Funzione da mondi/situazioni a valori di verità (proposizione) κ: Mondi → {T,F}

Un **contesto** $c = \langle \text{agente}, \text{tempo}, \text{luogo}, \text{mondo} \rangle$

Per "io": χ(io)(c) = l'agente di c κ(χ(io)(c))(w) = T sse l'agente di c esiste in w

"Io sono qui ora":

- Vero in ogni contesto c (necessariamente vero rispetto al carattere)
- Ma esprime contenuti contingenti (dipende da chi, dove, quando)

Logica LD (Logic of Demonstratives):

Operatori:

- **A** (Actually): Fissa il mondo di valutazione al mondo attuale del contesto
- **N** (Necessarily): Quantifica su mondi possibili

"Io sono effettivamente qui" vs "Io sono necessariamente qui":

- Primo: vero (carattere)
- Secondo: falso (avrei potuto essere altrove)

Parte VIII: Applicazioni della Teoria di Tarski

8.1 Fondamenti della Matematica

8.1.1 Semantica per Sistemi Assiomatici

La semantica tarskiana fornisce il significato dei sistemi assiomatici.

Aritmetica di Peano PA:

Assiomi (schema induttivo): ∀P[(P(0) ∧ ∀n(P(n) → P(S(n)))) → ∀n P(n)]

Modello standard: $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \times \rangle$

$\mathbb{N} \models$ PA (PA è vera nel modello standard)

Modelli non-standard: Per Löwenheim-Skolem, esistono modelli M ⊨ PA con M ≇ $\mathbb{N}$.

Questi contengono "pseudointeri" oltre ai naturali standard.

Conseguenza: Gli assiomi di PA non categorizzano $\mathbb{N}$ (non determinano univocamente i naturali).

8.1.2 Teoria degli Insiemi

ZFC: Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con Assioma di Scelta.

Modelli di ZFC:

- **V**: Universo dei "tutti" gli insiemi (classe propria, non un insieme)
- **V_κ**: Gerarchia cumulativa fino all'ordinale κ
- **L**: Universo costruibile di Gödel

Relatività ontologica: Diverse concezioni dell'universo degli insiemi (V vs. L vs. V = L + Large Cardinals) sono tutte consistenti con ZFC ma hanno diverse proprietà.

Indipendenza: Ipotesi del Continuo (CH): 2^{ℵ$_0$} = ℵ$_1$

- Cohen (1963): Esiste modello di ZFC + ¬CH
- Gödel (1938): Esiste modello di ZFC + CH (L)
- Quindi: ZFC ⊬ CH e ZFC ⊬ ¬CH

La semantica tarskiana permette di precisare questi risultati.

8.1.3 Realismo vs. Formalismo Matematico

Realismo Platonico: Gli enti matematici esistono oggettivamente. $\mathbb{N}$ è una struttura reale unica. La semantica tarskiana descrive verità in questa struttura.

Formalismo: La matematica studia sistemi formali. "Verità" è semplicemente soddisfacibilità in strutture. Non c'è impegno ontologico verso entità astratte.

Strutturalismo: La matematica studia strutture (pattern). $\mathbb{N}$ è il pattern dei progressioni ω-sequenze, non una particolare collezione di oggetti.

Posizioni diverse interpretano diversamente la semantica tarskiana:

- Realisti: descrive realtà matematica oggettiva
- Formalisti: strumento per analizzare sistemi formali
- Strutturalisti: descrive strutture astratte

8.2 Semantica dei Linguaggi di Programmazione

8.2.1 Semantica Operazionale

Definisce il significato di un programma P specificando come viene eseguito.

Small-Step (Strutturale):

Relazione di transizione: $\langle C, \sigma \rangle \to \langle C', \sigma' \rangle$

"Il comando C nello stato σ transisce a C' nello stato σ'"

Esempio (assegnamento): $\langle x := E, \sigma \rangle \to \langle skip, \sigma[x \mapsto [\![E]\!]\sigma] \rangle$

Esempio (sequenza): $\dfrac{\langle C_1, \sigma \rangle \to \langle C_1', \sigma' \rangle}{\langle C_1; C_2, \sigma \rangle \to \langle C_1'; C_2, \sigma' \rangle}$

Big-Step (Naturale):

Relazione: $\langle C, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$

"C eseguito in σ termina in σ'"

$\langle skip, \sigma \rangle \Downarrow \sigma$

$\dfrac{\langle C_1, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'' \quad \langle C_2, \sigma'' \rangle \Downarrow \sigma'}{\langle C_1; C_2, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'}$

8.2.2 Semantica Denotazionale

Ogni costrutto programma denota un oggetto matematico (tipicamente una funzione).

Domini di Scott: CPO (complete partial orders) con bottom ⊥ (non-terminazione)

$[\![-]\!]$: Program → (Stati → Stati_⊥)

$[\![skip]\!] = \lambda\sigma.\sigma$ (identità)

$[\![x := E]\!] = \lambda\sigma.\sigma[x \mapsto [\![E]\!]\sigma]$

$[\![C_1; C_2]\!] = [\![C_2]\!] \circ [\![C_1]\!]$ (composizione)

$[\![\text{while } B \text{ do } C]\!] = \text{fix}(\lambda f.\lambda\sigma.\ \text{if } [\![B]\!]\sigma \text{ then } f([\![C]\!]\sigma) \text{ else } \sigma)$

dove fix è l'operatore di punto fisso minimo.

Corrispondenza con Tarski: La semantica denotazionale è composizionale come la semantica tarskiana. Il significato del tutto dipende dal significato delle parti.

8.2.3 Semantica Assionale (Logica di Hoare)

Specifica proprietà dei programmi con triple di Hoare:

{P} C {Q}

"Se P vale prima di eseguire C e C termina, allora Q vale dopo"

Regole:

{P[E/x]} x := E {P} (assegnamento)

{P} C_1 {Q} {Q} C_2 {R} ——————————————————— (sequenza) {P} C_1; C_2 {R}

{P ∧ B} C {P} ——————————————————— (while) {P} while B do C {P ∧ ¬B}

Semantica:

{P} C {Q} è **vero** se per ogni stato σ, σ': Se σ ⊨ P e ⟨C, σ⟩ ⇓ σ', allora σ' ⊨ Q

La verità del triplo è definita alla Tarski rispetto alla semantica operazionale.

8.3 Intelligenza Artificiale e Rappresentazione della Conoscenza

8.3.1 Logica Descrittiva

Le ontologie per il Web Semantico usano Logica Descrittiva (DL), famiglia di logiche decidibili per rappresentare concetti e relazioni.

ALC (Attributive Language with Complements):

Concetti (C, D):

- A (concetto atomico)
- ⊤, ⊥ (top, bottom)
- ¬C (complemento)
- C ⊓ D (intersezione)
- C ⊔ D (unione)
- ∃R.C (esistenziale)
- ∀R.C (universale)

Ruoli (R): relazioni binarie

Semantica:

Interpretazione I = ⟨Δ^I, ·^I⟩

A^I ⊆ Δ^I ⊤^I = Δ^I ⊥^I = ∅ (¬C)^I = Δ^I \ C^I (C ⊓ D)^I = C^I ∩ D^I (C ⊔ D)^I = C^I ∪ D^I (∃R.C)^I = {x ∈ Δ^I : ∃y ∈ C^I, (x,y) ∈ R^I} (∀R.C)^I = {x ∈ Δ^I : ∀y, (x,y) ∈ R^I → y ∈ C^I}

TBox (Terminological Box): Assiomi concettuali

- C ⊑ D (subsumption): C^I ⊆ D^I
- C ≡ D (equivalenza): C^I = D^I

ABox (Assertional Box): Assiomi individuali

- C(a): a^I ∈ C^I

- R(a,b): (a^I, b^I) ∈ R^I

Esempio (Ontologia Familiare):

Padre ≡ Uomo ⊓ ∃haFiglio.Persona Nonno ≡ Padre ⊓ ∃haFiglio.Padre Padre(Giovanni) haFiglio(Giovanni, Maria)

Ragionamento: Verificare se KB ⊨ Nonno(Giovanni) richiede:

1. Giovanni^I ∈ Padre^I?
2. ∃x: (Giovanni^I, x) ∈ haFiglio^I ∧ x ∈ Padre^I?

Questo è decidibile per ALC (EXPTIME-completo).

8.3.2 Sistemi Multi-Agente e Logica Epistemica

Logica Epistemica:

Operatori:

- K_i φ: "l'agente i sa che φ"
- C_G φ: "φ è conoscenza comune nel gruppo G"

Semantica di Kripke:

$M = \langle W, (R_i)_{i \in Ag}, V \rangle$

R_i ⊆ W × W: relazione di accessibilità epistemica per agente i

$M, w \models K_i \varphi \Leftrightarrow \forall w' (wR_iw' \rightarrow M, w' \models \varphi)$

Assiomi (S5 per conoscenza):

- K: K_i(φ → ψ) → (K_i φ → K_i ψ)
- T: K_i φ → φ (veridicità)
- 4: K_i φ → K_i K_i φ (introspezione positiva)
- 5: ¬K_i φ → K_i ¬K_i φ (introspezione negativa)

Conoscenza comune:

$C_G \varphi \Leftrightarrow E_G \varphi \wedge E_G E_G \varphi \wedge E_G E_G E_G \varphi \wedge \ldots$

dove E_G φ = ⋀_{i∈G} K_i φ (tutti in G sanno φ)

Applicazione: Protocolli di coordinamento, puzzle epistemici, sistemi distribuiti.

8.3.3 Ontop e OBDA (Ontology-Based Data Access)

Integrare database relazionali con ontologie usando mappings.

Scenario:

- Database: relazioni SQL

- Ontologia: TBox in OWL/DL
- Mapping: Collega query SQL a concetti ontologici

Query Rewriting: Una query SPARQL sull'ontologia viene riscritta in SQL sul database.

La semantica tarskiana assicura che il risultato sia corretto: una tupla soddisfa la query SPARQL sse la corrispondente tupla SQL soddisfa la query riscritta.

8.4 Verifica Formale e Metodi Formali

8.4.1 Model Checking

Verificare automaticamente se un modello M (sistema) soddisfa una specifica φ (proprietà).

Logica Temporale CTL (Computation Tree Logic):

Operatori:

- EX φ: esiste un cammino dove φ vale al prossimo stato
- AX φ: in tutti i cammini φ vale al prossimo stato
- EG φ: esiste un cammino dove φ vale globalmente
- AG φ: in tutti i cammini φ vale globalmente
- EF φ: esiste un cammino dove φ vale eventualmente
- AF φ: in tutti i cammini φ vale eventualmente
- E(φ U ψ): esiste un cammino dove φ vale until ψ
- A(φ U ψ): in tutti i cammini φ vale until ψ

Semantica:

$M = \langle S, \rightarrow, L \rangle \text{ (Kripke structure)}$

- S: stati
- → ⊆ S × S: transizione
- L: S → 2^{AP}: etichettatura con proposizioni atomiche

$M, s \vDash EX\ \varphi \Leftrightarrow \exists s'(s \rightarrow s' \wedge M, s' \vDash \varphi)$

$M, s \vDash AG\ \varphi \Leftrightarrow \text{per ogni cammino } \pi = s_0 s_1 s_2 \ldots \text{ con } s_0 = s, \text{ per ogni } i \geq 0\text{: } M, s_i \vDash \varphi$

Algoritmi: Fixpoint algorithms per computare {s : M, s ⊨ φ}

Applicazioni: Verifica di protocolli hardware, software embedded, sistemi critici.

8.4.2 Theorem Proving

Sistemi interattivi per dimostrare proprietà di programmi.

Coq: Basato su Calcolo delle Costruzioni Induttive (CIC)

Una proposizione P:Prop è "vera" se è abitata (∃t:P)

Esempio:

```
Theorem plus_comm : ∀n m, n + m = m + n.
Proof.
  intros n m.
  induction n as [| n' IHn'].
  - simpl. rewrite <- plus_n_O. reflexivity.
  - simpl. rewrite <- IHn'. rewrite <- plus_n_Sm. reflexivity.
Qed.
```

La prova costruisce un termine t:∀n m, n + m = m + n.

Isabelle/HOL: Logica di ordine superiore

Definisce verità composizionalmente come Tarski, ma per HOL invece di FOL.

8.4.3 Abstract Interpretation

Analizzare proprietà di programmi approssimando la semantica concreta con una semantica astratta.

Semantica Concreta: $[\![P]\!]: 2^{Stati} \to 2^{Stati}$

Semantica Astratta: $[\![P]\!]^\sharp: D^\sharp \to D^\sharp$

dove D^♯ è un dominio astratto (es. intervalli, segni, poliedri)

Connessione di Galois:

α: 2^Stati → D^♯ (astrazione) γ: D^♯ → 2^Stati (concretizzazione)

$Correttezza: [\![P]\!] \subseteq \gamma \circ [\![P]\!]^\sharp \circ \alpha$

Esempio (Analisi di Segni):

D^♯ = {+, 0, -, ⊤, ⊥}

α({n ∈ ℤ : n > 0}) = + α({0}) = 0 α({n ∈ ℤ : n < 0}) = -

$[\![x + y]\!]^\sharp(+, +) = + \; [\![x + y]\!]^\sharp(+, -) = \top \; (\text{unknown})$

8.5 Linguistica Computazionale e NLP

8.5.1 Semantica Distribuzionale vs. Formale

Semantica Formale (Tarskiana): Significato = condizioni di verità

Semantica Distribuzionale: Significato = distribuzione in corpora

"You shall know a word by the company it keeps" (Firth)

Vector Space Models: Parole come vettori in ℝ^d

$sim(w_1, w_2) = \cos(v_1, v_2) = (v_1 \cdot v_2)/(\|v_1\| \, \|v_2\|)$

Word2Vec, GloVe, BERT: Embeddings neurali

Integrazione: Combinare semantica distribuzionale (lessicale) con semantica composizionale (tarskiana) è sfida aperta.

8.5.2 Semantic Parsing

Tradurre linguaggio naturale in rappresentazioni logiche formali.

"Ogni studente che ha superato l'esame è felice"

↓ (parsing)

$\forall x((\text{Studente}(x) \land \exists y(\text{Esame}(y) \land \text{Superato}(x,y))) \rightarrow \text{Felice}(x))$

Approcci:

- **Rule-based**: Grammatiche composizionali (CCG, TAG)
- **Neural**: Seq2seq con attenzione, Transformers
- **Hybrid**: Neural semantic parsing con vincoli logici

Teoria alternativa che permette autoreferenzialità semantica controllata usando punto fisso

8.6 Database e Linguaggi di Query

8.6.1 Database Relazionali

Un **database relazionale** è una struttura finita:

$\mathfrak{D} = \langle dom, R_1^{\mathfrak{D}}, ..., R_n^{\mathfrak{D}} \rangle$

dove:

dom: insieme finito (universo)
$R_i^{\mathfrak{D}} \subseteq dom^{\{ar_i\}}$: relazioni

Istanza di database: Assegnazione di tuple a schemi di relazione.

Esempio:

Studente(Nome, Età, Corso)
———————————————

(Alice, 20, CS)
(Bob, 22, Math)
(Carol, 21, CS)

$\text{Studente}^{\mathfrak{D}} = \{\langle \text{Alice}, 20, \text{CS} \rangle, \langle \text{Bob}, 22, \text{Math} \rangle, \langle \text{Carol}, 21, \text{CS} \rangle\}$

8.6.2 SQL e Calcolo Relazionale

SQL Query:

```
SELECT Nome
FROM Studente
WHERE Età > 20 AND Corso = 'CS'
```

Calcolo Relazionale (Tuple Calculus):

{t.Nome : Studente(t) ∧ t.Età > 20 ∧ t.Corso = 'CS'}

Semantica Tarskiana:

$[\![\text{Query}]\!]^{\wedge}D = \{a \in \text{dom} : D \vDash \varphi[\text{Nome}/a]\}$

dove φ è la formula corrispondente alla query.

Per la query sopra:

{a : ∃t(Studente(t.Nome, t.Età, t.Corso) ∧ t.Nome = a ∧ t.Età > 20 ∧ t.Corso = 'CS')}

Teorema di Codd: Algebra relazionale e calcolo relazionale sono equivalenti in potenza espressiva (per query sicure).

8.6.3 Datalog

Estensione logica dei database relazionali con regole ricorsive.

Esempio (Chiusura Transitiva):

```
Antenato(x, y) :- Genitore(x, y).
Antenato(x, z) :- Genitore(x, y), Antenato(y, z).
```

Semantica:

Minimo Modello: L'interpretazione più piccola che soddisfa le regole.

Punto Fisso: Calcolare iterativamente:

I_0 = {fatti base} I_{n+1} = I_n ∪ {Head : Body è vero in I_n}

Antenato^D = ∪_{i=0}^∞ I_i (in realtà, finita dopo un numero finito di passi)

Connessione con Tarski: La semantica di punto fisso è una particolare interpretazione tarskiana dove cerchiamo il minimo modello (principio di circoscrizione).

8.7 Teoria della Computazione

8.7.1 Verità Aritmetica e Gerarchia Aritmetica

Gerarchia Aritmetica classifica formule per complessità quantificazionale:

$\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$: Formule limitate (quantificatori limitati)

Σ_{n+1}: $\exists x_1 ... \exists x_k \varphi$ dove φ è Π_n

Π_{n+1}: $\forall x_1 ... \forall x_k \varphi$ dove φ è Σ_n

Δ_n: $\Sigma_n \cap \Pi_n$

Esempi:

"n è primo": Π_1 $(\forall x \forall y(x \cdot y = n \rightarrow x = 1 \vee y = 1))$
"n è composto": Σ_1 $(\exists x \exists y(1 < x < n \wedge 1 < y < n \wedge x \cdot y = n))$
Teorema di Fermat: Π_1

Complessità della Verità:

Teorema 8.1: L'insieme $Tr_\Sigma_n = \{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi$ è Σ_n e $\mathbb{N} \vDash \varphi\}$ è:

Σ_{n+1}-completo per ricursività
Non è Σ_n né Π_n

Quindi la verità per formule Σ_n è strettamente più complessa delle formule Σ_n stesse.

8.7.2 Verità e Oracoli di Turing

Macchine di Turing con Oracolo:

M^A: macchina con accesso a oracolo $A \subseteq \mathbb{N}$

Salto di Turing: A' = {e : $\Phi_e^A(e)\downarrow$} (halting problem relativo ad A)

Gerarchia:

$\emptyset$ (ricorsivo)
$\emptyset'$ = K (halting problem)
$\emptyset''$ = K'
...
$\emptyset^{(\omega)} = \{n : n \in Tr_\Sigma_n\}$

Teorema 8.2: La verità aritmetica completa ha grado di Turing $\emptyset^{(\omega)}$.

Non è in alcun livello finito della gerarchia aritmetica.

8.7.3 Complessità Descrittiva

Connessione tra logica e complessità computazionale.

Teorema di Fagin: NP = classe delle proprietà esprimibili in logica esistenziale del secondo ordine (ESO).

Una proprietà $L \subseteq \{0,1\}^*$ è in NP sse esiste formula ESO φ tale che:

$x \in L \Leftrightarrow M_x \vDash \varphi$

dove M_x è una struttura codificante x.

Altri risultati:

PSPACE = logica del secondo ordine con quantificazione alternata limitata
LOGSPACE = logica transitiva del primo ordine
P = logica del primo ordine con punto fisso minimo

Questi risultati mostrano che limiti computazionali corrispondono a limiti espressivi logici.

Parte IX: Questioni Filosofiche Avanzate e Dibattiti Contemporanei

9.1 Deflazionismo vs. Sostanzialismo sulla Verità

9.1.1 Deflazionismo

Tesi deflazionista: "è vero" è un dispositivo logico-linguistico privo di contenuto sostanziale. La verità non è una proprietà genuina.

Argomenti:

Schema T: Le equivalenze-T esauriscono tutto ciò che c'è da dire sulla verità. "P è vero" non aggiunge nulla a "P".

Ridondanza (Ramsey): "P" e "P è vero" hanno le stesse condizioni di asseribilità.

Funzione pragmatica: "vero" serve per generalizzazioni infinite:

"Tutto ciò che il Papa dice è vero" = ∀p(Dice(Papa, p) → p)
Non possiamo elencare infinite istanze, serve il predicato di verità

Versioni:

Ridondantismo (Ramsey): "vero" è eliminabile
Disquotazionalismo (Quine, Field): "vero" è dispositivo di disquotazione
Prosententalismo (Grover, Camp, Belnap): "è vero" funziona come pro-frase
Minimalismo (Horwich): La comprensione di "vero" consiste nell'accettare tutte le istanze dello schema T

Problema con Deflazionismo: Se "vero" non denota proprietà reale, come spieghiamo:

Il successo delle azioni basate su credenze vere?
Il ruolo normativo della verità?
Le generalizzazioni teoriche sulla verità (corrispondenza, coerenza)?

9.1.2 Sostanzialismo

Tesi sostanzialista: La verità è una proprietà genuina, sostanziale, con natura metafisica.

Teorie sostanzialiste:

1. Corrispondentismo: P è vera sse corrisponde a un fatto.

Struttura: P è vera $\Leftrightarrow \exists f$(P corrisponde a f $\wedge$ f ottiene)

Problema: Cosa sono i fatti? Entità metafisicamente problematiche.

Risposta (Austin, Armstrong): I fatti sono stati di cose nel mondo, non entità linguistiche.

2. Coerentismo: P è vera sse è coerente con il sistema di credenze S.

Problema: Sistemi coerenti ma incompatibili. Quale è "vero"?

3. Identity Theory (McDowell, Hornsby): Proposizioni vere sono identiche a fatti.

P vera = P è un fatto

Non c'è relazione di corrispondenza, ma identità.

4. Primitivismo (Asay): La verità è una proprietà primitiva, irriducibile, fondamentale.

9.1.3 Tarski e il Dibattito

Interpretazione deflazionista di Tarski: Lo schema T mostra che la verità è "disquotazionale" e non sostanziale.

Obiezione: La definizione di Tarski è altamente sostanziale:

Richiede nozioni metafisicamente robuste (riferimento, strutture)
Usa quantificazione su assegnazioni (entità astratte)
Non è eliminabile (teorema di indefinibilità)

Interpretazione corrispondentista: La semantica tarskiana è precisazione formale della teoria della corrispondenza. La soddisfacibilità è corrispondenza tra formule e configurazioni nel modello.

9.2 Verità e Realismo Scientifico

9.2.1 Il Dibattito Realismo/Anti-Realismo

Realismo Scientifico: Le teorie scientifiche mature sono (approssimativamente) vere. I termini teorici si riferiscono a entità reali (elettroni, campi, etc.).

Anti-Realismo Strumentalista: Le teorie sono strumenti per predizioni. La verità empirica (osservazionale) è tutto ciò che conta.

Anti-Realismo Costruttivista: Le entità scientifiche sono costruzioni sociali, non realtà indipendenti.

9.2.2 Argomento del Non-Miracolo

Putnam: Il successo predittivo della scienza sarebbe un miracolo se le teorie non fossero (approssimativamente) vere.

Formalmente:

T è teoria scientifica matura
T ha successo predittivo straordinario
La migliore spiegazione del successo è che T è vera
Quindi (per inferenza alla miglior spiegazione): T è vera

Problema: Induzione pessimistica (Laudan): Molte teorie passate con successo empirico si sono rivelate false (flogisto, etere, etc.). Perché le attuali dovrebbero essere diverse?

9.2.3 Realismo Strutturale

Worrall: Ciò che si preserva attraverso rivoluzioni scientifiche è la **struttura** matematica, non l'ontologia.

Esempio: Ottica ondulatoria (Maxwell) vs. corpuscolare → Le equazioni (struttura) si preservano, l'interpretazione ontologica cambia.

Realismo Strutturale Epistemico: Conosciamo solo strutture, non la natura intrinseca delle entità.

Realismo Strutturale Ontico (Ladyman, French): Solo le strutture esistono. Le relazioni sono fondamentali, i relata sono derivati.

Connessione con Tarski: I teoremi di Löwenheim-Skolem mostrano che la verità nel primo ordine è insensibile a differenze ontologiche tra modelli isomorfi. Questo supporta realismo strutturale: ciò che conta è la struttura, non gli "oggetti" specifici.

9.3 Verità e Pluralismo

9.3.1 Pluralismo Aletico

Tesi (Lynch, Wright): Esistono diversi **modi** o **specie** di verità per diversi discorsi.

Verità matematica: Coerenza/provabilità
Verità morale: Convergenza idealizzata/superasseribilità
Verità empirica: Corrispondenza
Verità logica: Validità formale

Problema: Cosa unifica queste nozioni diverse come "verità"?

Risposta: Ruolo funzionale comune (norma di credenza, scopo dell'indagine, trasparenza: "credere P = credere P è vero")

9.3.2 Relativismo Aletico

Tesi: La verità è relativa a parametri contestuali (framework, paradigma, forma di vita).

Relativismo Concettuale (Kuhn, Feyerabend): Teorie incommensurabili operano in framework concettuali diversi. Non c'è verità framework-indipendente.

Obiezione: Auto-refutazione. "La verità è relativa" è essa stessa relativa o assoluta?

Relativismo Semantico (MacFarlane): Alcune frasi (futuri contingenti, predicati di gusto) hanno verità relativa a contesti di valutazione.

"La torta è gustosa": vera relativa al mio gusto, falsa relativa al tuo.

9.3.3 Monismo Aletico

Tesi: C'è un'unica nozione di verità unificata.

Argomento: Le generalizzazioni inter-dominio richiedono verità unificata:

"Tutto ciò che la scienza e la matematica dicono è vero"

Questo quantifica su proposizioni matematiche ed empiriche. Serve nozione unificata.

Tarski e Monismo: La definizione tarskiana fornisce verità unificata per ogni linguaggio formalizzato. Diversi linguaggi hanno diverse condizioni di verità, ma la **forma** della definizione (soddisfacibilità induttiva) è uniforme.

9.4 Verità e Veridicità Temporale

9.4.1 Presentismo, Eternalismo, Crescentismo

Presentismo: Solo il presente esiste. Il passato e il futuro non esistono.

Problema: Come sono vere frasi al passato? "Cesare attraversò il Rubicone" è vera, ma Cesare non esiste (presentismo).

Soluzione: Operatori temporali primitivi. Non $\mathbb{N} \vDash$ Attraversò(Cesare, Rubicone), ma $\mathbb{N} \vDash$ WAS(Attraversa(Cesare, Rubicone)).

Eternalismo: Passato, presente, futuro esistono tutti (4-dimensionalismo).

Frasi temporali sono vere/false eternamente: $\exists t(t < \text{ora} \wedge \text{Attraversa_t(Cesare, Rubicone)})$

Crescentismo (Tooley): Solo passato e presente esistono. Il futuro è aperto.

9.4.2 Logiche Temporali

LTL (Linear Temporal Logic):

Operatori:

- $F\ \varphi$: Eventually φ (futuro)
- $G\ \varphi$: Always φ (globale)
- $X\ \varphi$: Next φ
- $\varphi\ U\ \psi$: φ Until ψ

Semantica:

$M, i \vDash F\,\varphi \Leftrightarrow \exists j \geq i: M, j \vDash \varphi$ $M, i \vDash G\,\varphi \Leftrightarrow \forall j \geq i: M, j \vDash \varphi$ $M, i \vDash \varphi\ U\ \psi \Leftrightarrow \exists j \geq i (M, j \vDash \psi \wedge \forall k (i \leq k < j \rightarrow M, k \vDash \varphi))$

CTL (Branching Time): Combina modalità temporali con quantificazione su cammini (E, A).

9.5 Verità e Vagezza

9.5.1 Il Paradosso del Sorite

Un uomo con 0 capelli è calvo. Se un uomo con n capelli è calvo, allora un uomo con n+1 capelli è calvo. ——————————————————————————————————————
Quindi, tutti gli uomini sono calvi. (Assurdo!)

Problema: Predicati vaghi ("calvo", "alto", "rosso") non hanno confini netti.

9.5.2 Teorie della Vagezza

1. Epistemicismo (Williamson): C'è un numero preciso n tale che n capelli = calvo, n+1 = non calvo. Ma non possiamo conoscerlo.

La vagezza è ignoranza, non indeterminatezza semantica.

Problema: Sembra implausibile che esista un confine preciso metafisicamente determinato.

2. Supervaluazionismo (Fine, Kamp): "Calvo" ha una penombra di casi borderline.

Precisificazione: funzione v: Vagh → {T, F} che completa i casi vaghi mantenendo verità centrali.

φ è:

Supertrue: vera in tutte le precisificazioni
Superfalse: falsa in tutte
Indefinita: vera in alcune, falsa in altre

Logica classica si preserva per supervero.

3. Logica Fuzzy: "Calvo" ha gradi di verità $v(\text{Calvo}(n)) \in [0, 1]$.

v(Calvo(n)) decresce continualmente con n.

4. Nihilismo (Unger): Predicati vaghi non si applicano realmente. Nessuno è "calvo" in senso stretto (assurdità).

9.6 Paradossi Auto-Referenziali Avanzati

9.6.1 Paradosso di Yablo

Sequenza infinita di frasi:

Y_1: Per ogni k > 1, Y_k è falsa Y_2: Per ogni k > 2, Y_k è falsa Y_3: Per ogni k > 3, Y_k è falsa ...

Nessuna frase si riferisce esplicitamente a se stessa, ma la sequenza genera paradosso.

Analisi: Y_n non può essere vera (altrimenti Y_{n+1} è falsa, contraddizione). Y_n non può essere falsa (altrimenti esiste k > n con Y_k vera, contraddizione).

Significato: Autoreferenzialità esplicita non è necessaria per paradossi. La circolarità può essere "diffusa" in strutture infinite.

9.6.2 Paradosso di Curry

C: Se C è vera, allora φ

dove φ è proposizione arbitraria (anche contraddizione).

Derivazione:

Assumiamo C (per →-introduzione)
Quindi C è vera (da 1)
Quindi Se C è vera, allora φ (da 2 e contenuto di C)
Quindi φ (modus ponens su 2, 3)
Quindi C → φ (da 1-4, →-introduzione)
Ma C dice "C → φ", quindi C è vera
Quindi φ (modus ponens su 6, 5)

Abbiamo derivato φ arbitraria! Inclusa contraddizione.

Soluzione: Rigettare contrazione (regola: (A → (A → B)) → (A → B)) o usare logiche relevanti/paraconsistenti.

9.6.3 McGee Sentences

φ: ∀p(p → ∃q(q ≠ p ∧ (q ↔ φ)))

"Per ogni proposizione p, se p allora esiste una proposizione diversa q che è equivalente a me"

Analisi model-teorica mostra che tali frasi sono patologiche ma non contraddittorie tecnicamente.

9.7 Verità e Indeterminatezza Quantistica

9.7.1 Logica Quantistica

Problema: In meccanica quantistica, certe proposizioni non soddisfano logica classica.

p: "lo spin-x è up" q: "lo spin-y è up"

p ∧ q non è ben definita (incompatibilità di osservabili).

Logica Quantistica (Birkhoff-von Neumann): Proposizioni formano reticolo ortomodulare non-distributivo.

Distributività fallisce: p ∧ (q ∨ r) ≠ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

Semantica: Proposizioni = sottospazi chiusi dello spazio di Hilbert.

$[\![p \wedge q]\!] = [\![p]\!] \cap [\![q]\!]$ $[\![p \vee q]\!] = \text{chiusura}([\![p]\!] + [\![q]\!])$ $[\![\neg p]\!] = [\![p]\!]^{\perp}$ (complemento ortogonale)

9.7.2 Interpretazioni della Meccanica Quantistica

Copenhagen: Il collasso della funzione d'onda è reale. Prima della misura, le proprietà sono indeterminate (non né vere né false).

Many-Worlds: Ogni esito è reale in universi paralleli. Tutte le proposizioni hanno valore di verità, ma relativo a branch.

Bohmiana: Variabili nascoste. Tutte le proprietà hanno valori definiti (ma epistemicamente inaccessibili).

Connessione con Tarski: Se proprietà quantistiche sono indeterminate, la semantica bivalente classica non si applica. Servono logiche trivalenti o logica quantistica.

9.8 Verità in Contesti Normativi

9.8.1 Verità Morale

Realismo Morale: Esistono verità morali oggettive. "Torturare innocenti per divertimento è sbagliato" è oggettivamente vero.

Anti-Realismo (Emotivismo): Le affermazioni morali esprimono emozioni/attitudini, non verità. "Uccidere è sbagliato" = "Uccidere, boo!"

Quasi-Realismo (Blackburn): Le affermazioni morali si comportano sintatticamente come asserzioni di verità (embedded in condizionali, etc.) anche se non descrivono fatti morali.

Costruttivismo (Korsgaard): Le verità morali sono costruite attraverso procedure di ragionamento pratico, non scoperte.

9.8.2 Convergenza e Oggettività

Argomento per Realismo: Convergenza nell'indagine morale sotto condizioni ideali suggerisce oggettività.

Se in dialogo aperto, razionale, informato, agenti convergono su p, allora p è vero.

Obiezione: Convergenza può riflettere psicologia condivisa, non realtà morale indipendente.

Risposta: Condizioni ideali includono correzione di bias, informazione completa. La convergenza sotto queste condizioni è non-accidentale.

Parte X: Sviluppi Contemporanei e Frontiere della Ricerca

10.1 Verità Probabilistica e Verosimiglianza

10.1.1 Gradi di Verità

In contesti probabilistici, frasi hanno **gradi di verità** v(φ) ∈ [0, 1].

Probabilità Oggettiva: Frequenza a lungo termine (propensità)

v(φ) = lim_{n→∞} |{i ≤ n : φ vera in trial i}|/n

Probabilità Soggettiva (Bayesiana): Grado di credenza razionale

v(φ) = P(φ) = credenza dell'agente in φ

Probabilità Logica: Grado di conferma di evidenza E per ipotesi H

v(H|E) = P(H|E) = P(H ∧ E)/P(E)

10.1.2 Verosimiglianza (Truthlikeness)

Popper: Le teorie scientifiche non sono "vere" ma possono essere **più vicine alla verità**.

Definizione (tentativo di Popper):

T_1 è più verosimile di T_2 se:

{vere conseguenze di T_1} ⊃ {vere conseguenze di T_2}
{false conseguenze di T_1} ⊂ {false conseguenze di T_2}

Problema (Miller, Tichý): Ogni teoria falsa ha conseguenze false infinite. La definizione non funziona.

Approccio di Niiniluoto:

Distanza tra teoria T e verità completa V:

d(T, V) = misura delle differenze tra {verità in T} e {tutte le verità}

Usa logiche probabilistiche o possible-worlds.

10.1.3 Verità Approssimata

In fisica, matematica applicata, le teorie sono "approssimativamente vere".

Esempio: Meccanica Newtoniana è approssimazione della Relatività per v << c.

F = ma (Newton) è "quasi vero" quando v << c.

F = γma dove γ = (1 - v²/c²)^{-1/2} (Einstein)

Formalizzazione:

φ è ε-approssimativamente vera se ∃ψ(d(φ, ψ) < ε ∧ ψ è vera)

dove d è metrica su formule/modelli.

10.2 Verità e Machine Learning

10.2.1 Explainable AI e Verità

Reti neurali deep apprendono funzioni complesse ma sono "black boxes".

Problema: Un classificatore NN predice "questa immagine contiene un gatto". È "vero"? In che senso?

Approcci:

1. Verità come Accuratezza: NN è "vero" se acc(NN, test set) > threshold

Problema: Accuratezza ≠ verità. NN può avere alta accuratezza ma per ragioni sbagliate (spurious correlations).

2. Verità come Fedeltà: NN è fedele se le sue rappresentazioni interne corrispondono a strutture reali.

Usa tecniche di interpretabilità (saliency maps, concept activation vectors).

3. Estrazione di Regole Logiche: Estrarre regole simboliche da NN che approssimano il comportamento.

NN(x) ≈ ⋁_i (⋀*j x_j* ∈ *R*{ij} → classe_i)

Queste regole possono essere valutate per verità semantica classica.

10.2.2 Neurosymbolic AI

Obiettivo: Integrare apprendimento neurale con ragionamento simbolico.

Approcci:

Logic Tensor Networks: Embedding di predicati logici in spazi vettoriali continui.

$[\![P(x, y)]\!] = \sigma(w \cdot [\text{embed}(x) \oplus \text{embed}(y)])$

dove σ è sigmoide, ⊕ è operazione vettoriale.

Verità graduata: v(φ) ∈ [0, 1] ma con struttura logica composizionale.

Neural Theorem Provers: NN addestrate a trovare prove di teoremi.

Input: Assiomi + Goal Output: Sequenza di regole di inferenza (dimostrazione)

Semantica: Una prova è "vera" se ogni passo è un'inferenza valida (verificabile esternamente).

10.3 Verità e Quantum Computing

10.3.1 Logica Quantistica Computazionale

Quantum Bits: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

"Verità" di un qubit non è determinata prima della misura. La misura proietta:

$|\psi\rangle \to |0\rangle$ con probabilità $|\alpha|^2$ $|\psi\rangle \to |1\rangle$ con probabilità $|\beta|^2$

Quantum Gates: Operazioni unitarie U: H → H

Clifford gates: Hadamard, CNOT, Phase Universalità: Clifford + T gate = computazione quantistica universale

Semantica di Quantum Circuits:

$|output\rangle = U_n \ldots U_2 U_1 |input\rangle$

"Vero" è sostituito da "probabilità di misurare $|result\rangle$":

$P(|x\rangle) = |\langle x|output\rangle|^2$

10.3.2 Quantum Algorithms e Verificabilità

Grover's Algorithm: Ricerca in database di N elementi in O(√N).

Shor's Algorithm: Fattorizzazione in tempo polinomiale.

Problema: Come verificare che l'algoritmo quantistico è "corretto" (produce risultati "veri")?

Quantum Verification: Protocolli interattivi dove verifier classico verifica prover quantistico.

V ↔ Q: V pone domande, Q risponde. V accetta se le risposte sono consistenti.

10.4 Verità e Blockchain / Distributed Ledgers

10.4.1 Consenso Distribuito

Problema: N nodi devono concordare su "verità" di transazioni senza autorità centrale.

Blockchain: Registro distribuito immutabile.

$Block_i = \langle transactions_i, hash(Block_{i-1}), nonce \rangle$

Proof of Work: Trovare nonce tale che hash(Block) < target.

Consenso: La catena più lunga è la "vera" storia delle transazioni.

Semantica: "T è vera" = T è in un blocco confermato (≥ k conferme).

Probabilità che T venga rovesciata → 0 esponenzialmente con k.

10.4.2 Smart Contracts

Ethereum: Contratti auto-eseguenti on-chain.

```
contract Token {
   mapping(address => uint) balances;

   function transfer(address to, uint amount) {
      require(balances[msg.sender] >= amount);
      balances[msg.sender] -= amount;
      balances[to] += amount;
   }
}
```

Semantica: Stato del contratto è determinato da:

- Stato iniziale S_0
- Sequenza di transazioni T_1, ..., T_n
- Funzione di transizione: S_{i+1} = exec(S_i, T_i)

Verità: "balance[Alice] = 100" è vero sse lo stato corrente della blockchain lo afferma.

Verifica Formale: Dimostrare proprietà del contratto usando metodi formali (Coq, Isabelle, K Framework).

Invariante: ∑_a balances[a] = totalSupply (conservazione)

10.5 Verità in Sistemi Multi-Agente e Game Theory

10.5.1 Common Knowledge

Definizione: φ è conoscenza comune tra agenti G se:

C_G φ ⟺ E_G φ ∧ E_G E_G φ ∧ E_G E_G E_G φ ∧ ...

dove E_G φ = /_{i∈G} K_i φ (tutti in G sanno φ)

Teorema: In frame finiti, C_G φ = E^n_G φ per n sufficientemente grande.

Applicazione: Protocolli di coordinamento richiedono common knowledge.

Coordinated Attack Problem: Due generali devono attaccare simultaneamente. Comunicano via messaggeri inaffidabili. È impossibile raggiungere common knowledge dell'accordo.

10.5.2 Equilibri e Conoscenza

Nash Equilibrium: Profilo di strategie s* tale che nessun giocatore può migliorare deviando unilateralmente.

Teorema (Aumann): Se giocatori razionali hanno common knowledge delle strategie e payoff, e common knowledge che tutti giocano razionalmente, allora il risultato è Nash equilibrium.

Connessione con Verità: La common knowledge richiede verità condivisa. Senza verità oggettiva sulle strategie, non c'è equilibrio stabile.

10.6 Verità e Social Choice Theory

10.6.1 Teorema di Impossibilità di Arrow

Condizioni desiderabili per aggregazione di preferenze:

1. **Non-dittatura**: Nessun individuo determina l'esito sociale
2. **Universalità**: Funzione definita per ogni profilo di preferenze
3. **Indipendenza**: Preferenza sociale tra x, y dipende solo da preferenze individuali tra x, y
4. **Pareto**: Se tutti preferiscono x a y, anche società preferisce x a y

Teorema di Arrow: Nessuna funzione di scelta sociale soddisfa tutte e quattro con ≥ 3 alternative.

Connessione con Verità: Se "preferenza sociale vera" soddisfa queste condizioni, teorema dice che non esiste. Quindi "verità" in contesti sociali è problematica.

10.6.2 Epistemic Social Choice

Condorcet Jury Theorem: Se giocatori votano indipendentemente con $p > 0.5$ di correttezza, la probabilità che la maggioranza sia corretta $\to 1$ quando $n \to \infty$.

Interpretazione: Aggregazione democratica "converge alla verità" sotto condizioni ideali.

Problema: Indipendenza raramente vale (correlazione, echo chambers, information cascades).

10.7 Verità e Proof Complexity

10.7.1 Sistemi di Dimostrazione

Resolution: Sistema di refutazione per formule in CNF.

Regola: $(C \vee x) \wedge (D \vee \neg x) \vdash (C \vee D)$

Frege Systems: Sistemi assiomatici proposizionali (type di Hilbert-style).

Sequent Calculus: Gentzen-style, regole strutturali.

Complessità: Misurare lunghezza minima di prove.

10.7.2 Separazioni di Sistemi

Teorema (Haken): Esiste famiglia di tautologie $\{\varphi_n\}$ tale che ogni prova Resolution di φ_n ha lunghezza esponenziale in n.

Esempio: Principio di Pigeonhole (n+1 piccioni in n buche).

Open Problem: P vs. NP $\Leftrightarrow$ Esiste sistema di dimostrazione con prove polinomiali per tutte le tautologie?

Connessione con Verità: La "verità" (validità) di φ può essere riconoscibile, ma dimostrare φ può richiedere risorse proibitive.

10.8 Verità nelle Teorie Fisiche Avanzate

10.8.1 Relatività Generale e Verità Spaziotemporale

In relatività generale, spaziotempo è dinamico (curvato da materia-energia).

Problema: "È vero che evento A è simultaneo a B"?

Non c'è simultaneità assoluta. Dipende da frame di riferimento.

Soluzione: Verità spaziotemporale è frame-invariante:

$$\varphi \text{ è vera} \iff \varphi \text{ vale in tutti i frame inerziali (per grandezze invarianti)}$$

Esempio: "l'intervallo spaziotemporale tra A e B è timelike" è oggettivamente vero/falso.

10.8.2 String Theory e Dualità

Problema: String theory ha formulazioni duali apparentemente diverse (Type IIA ↔ Type IIB, AdS/CFT).

Dualità: Teorie fisicamente equivalenti ma matematicamente distinte.

Questione: Quale formulazione è "vera"?

Risposta Strutturalista: Entrambe sono true descriptions della stessa struttura fisica. Non c'è fatto della materia che privilegi una rappresentazione.

Connessione con Tarski: Modelli isomorfi soddisfano le stesse frasi. Teorie duali sono "isomorfe" fisicamente, quindi descrivono la stessa "verità fisica".

10.8.3 Cosmologia e Multiverso

Inflazione Eterna: Genera infiniti universi bubble.

String Landscape: 10^{500} vacua possibili.

Questione: "Le costanti fondamentali sono c, $\hbar$, G" è vero?

Antropic Reasoning: Vero nel nostro universo osservabile, ma altri universi hanno valori diversi.

Verità cosmologica: Relativizzata a regioni spaziotemporali? O c'è verità globale (wavefunction dell'universo)?

Parte XI: Conclusioni, Valutazione e Significato Storico

11.1 Riassunto dei Contributi di Tarski

La teoria della verità di Alfred Tarski costituisce uno dei pilastri fondamentali della logica matematica e della filosofia del linguaggio del XX secolo. I suoi contributi principali includono:

11.1.1 Contributi Tecnici

1. Definizione Rigorosa di Verità: Prima definizione matematicamente precisa del concetto di verità per linguaggi formalizzati, basata sulla nozione di soddisfacibilità definita induttivamente.

2. Convenzione T: Criterio di adeguatezza materiale che cattura l'intuizione corrispondentista: "S è vera iff p".

3. Teorema di Indefinibilità: Dimostrazione che la verità per linguaggi sufficientemente espressivi non è definibile all'interno di quei linguaggi, stabilendo limiti intrinseci dell'auto-rappresentazione.

4. Fondazione della Teoria dei Modelli: La semantica tarskiana è il fondamento della teoria dei modelli come disciplina autonoma, permettendo lo studio sistematico di strutture matematiche e loro proprietà.

5. Distinzione Linguaggio/Metalinguaggio: Soluzione ai paradossi semantici attraverso gerarchia di livelli linguistici, mostrando che l'autoreferenzialità semantica genera inconsistenza.

11.1.2 Contributi Metodologici

1. Rigor Matematico in Filosofia: Tarski dimostrò che concetti filosoficamente controversi possono essere trattati con precisione matematica senza perdere rilevanza filosofica.

2. Aritmetizzazione della Sintassi: Sviluppò (indipendentemente da Gödel) tecniche per codificare sintassi come aritmetica, permettendo meta-matematica rigorosa.

3. Composizionalità: Enfatizzò il principio di composizionalità come centrale per la semantica, influenzando linguistica, informatica, filosofia del linguaggio.

4. Oggettività Semantica: Fornì una concezione obiettiva della verità basata su relazioni strutturali, evitando sia psicologismo che convenzionalismo arbitrario.

11.1.3 Contributi Filosofici

1. Precisazione della Corrispondenza: La semantica tarskiana può essere vista come precisazione formale della teoria della corrispondenza (proposizioni corrispondono a fatti/configurazioni nel mondo).

2. Separazione Semantica/Sintassi: Distinse chiaramente tra conseguenza semantica ($\models$) e derivabilità sintattica ($\vdash$), mostrando che convergono nel primo ordine (completezza) ma divergono altrimenti.

3. Relatività della Verità: Mostrò che la verità è sempre relativa a linguaggio e interpretazione, ma non in modo relativisticamente problematico (c'è verità oggettiva dato un linguaggio e interpretazione).

4. Soluzione ai Paradossi: Risolse i paradossi semantici in modo non-ad-hoc, mostrando che derivano da confusione tra livelli linguistici, non da incoerenza del concetto di verità stesso.

11.2 Impatto Interdisciplinare

11.2.1 Logica Matematica

- **Teoria dei Modelli**: Tarski è considerato il fondatore della teoria dei modelli moderna
- **Teoremi Fondamentali**: Compattezza, Löwenheim-Skolem, completezza (Gödel) sono compresi semanticamente
- **Algebre Booleane e Cilindriche**: Tarski sviluppò teorie algebriche della logica
- **Decision Procedures**: Dimostrò decidibilità della geometria euclidea, algebra reale chiusa

11.2.2 Filosofia

- **Filosofia del Linguaggio**: Influenzò Davidson, Putnam, Kripke, Lewis
- **Epistemologia**: Fornì strumenti per analizzare conoscenza, giustificazione, scetticismo semantico
- **Metafisica**: Realismo vs. anti-realismo, natura delle proprietà, strutturalismo
- **Filosofia della Scienza**: Realismo scientifico, verosimiglianza, riduzione interteoretica

11.2.3 Informatica

- **Linguaggi di Programmazione**: Semantica denotazionale, operazionale, assionale
- **Verifica Formale**: Model checking, theorem proving, abstract interpretation
- **Database**: Query semantics, datalog, integrity constraints
- **AI**: Knowledge representation, description logics, ontologies

11.2.4 Linguistica

- **Semantica Formale**: Montague grammar, generalizzatori, anafora
- **Pragmatica**: Distinzione semantica/pragmatica, presupposizioni
- **Computational Linguistics**: Semantic parsing, textual entailment

11.3 Limiti e Critiche

Nonostante il successo straordinario, la teoria di Tarski ha limiti riconosciuti:

11.3.1 Limiti Tecnici

1. Solo Linguaggi Formalizzati: La teoria si applica rigorosamente solo a linguaggi con sintassi precisa, non immediatamente ai linguaggi naturali con tutta la loro complessità.

2. Presuppone Interpretazione: La teoria assume che l'interpretazione I (riferimento) sia data. Non spiega come il riferimento è stabilito o come lo comprendiamo.

3. Primo Ordine Privilegiato: La semantica è più naturale per il primo ordine. Ordini superiori richiedono scelte (semantica standard vs. Henkin).

4. Classicalità: La semantica è intrinsecamente bivalente (classica). Estensioni a logiche non-classiche richiedono modifiche sostanziali.

11.3.2 Limiti Filosofici

1. Non Fondazionale: Richiede metalinguaggio già compreso, quindi non fornisce una fondazione ultimativa della verità.

2. Non Riduzionista: Non riduce la verità a concetti non-semantici (fisici, comportamentali, computazionali).

3. Silenzio su Linguaggio Naturale: Non affronta direttamente vaghezza, ambiguità, indicali, implicature del linguaggio ordinario.

4. Non Normativo: Descrive condizioni di verità ma non spiega perché dovremmo perseguire la verità o quale ruolo epistemico gioca.

11.3.3 Limiti Applicativi

1. Ontologia Ricca: Richiede teoria degli insiemi o equivalente, impegno ontologico verso astratti.

2. Non-Costruttività: La definizione non è costruttiva (usa quantificazione su insiemi infiniti), non accettabile per costruttivisti/intuizionisti.

3. Gap con Pratica Scientifica: Gli scienziati non formulano teorie in primo ordine con semantica esplicita tarskiana.

11.4 Questioni Aperte e Ricerca Futura

11.4.1 Questioni Tecniche

1. Verità per Linguaggi Naturali: Sviluppare semantiche formali complete per frammenti sostanziali dei linguaggi naturali mantenendo rigore tarskiano.

2. Verità e Computazione: Integrare semantica tarskiana con semantica computazionale (lambda calcolo, teoria dei tipi, homotopy type theory).

3. Verità Graduata: Teorie unificate di verità probabilistica, fuzzy, approximate truth.

4. Verità Dinamica: Semantiche per contesti dove informazione cambia (update semantics, dynamic epistemic logic).

11.4.2 Questioni Filosofiche

1. Naturalizzazione: Spiegare come creature fisiche (noi) hanno accesso a verità semantiche che trascendono il fisico.

2. Normatività: Spiegare il ruolo normativo della verità (perché dovremmo credere il vero) in termini non-circolari.

3. Realismo/Anti-Realismo: Risolvere se la semantica tarskiana presuppone realismo metafisico o è compatibile con anti-realismo.

4. Pluralismo: Determinare se esiste una nozione unificata di verità o diverse nozioni per domini diversi.

11.4.3 Questioni Applicative

1. AI Spiegabile: Sviluppare metodi per estrarre "verità" (conoscenza simbolica verificabile) da modelli neurali opachi.

2. Verifica Quantistica: Protocolli per verificare correttezza di computazioni quantistiche usando principi semantici classici.

3. Truth in Social Networks: Modelli formali di diffusione/distorsione della verità in reti sociali, fake news, polarizzazione.

4. Blockchain Truth: Formalizzare quando informazione on-chain è "vera" (consenso, finalità, fork resolution).

11.5 Eredità e Rilevanza Contemporanea

11.5.1 Un Paradigma Duraturo

La semantica tarskiana rimane il paradigma dominante per verità in:

- Logica matematica (teoria dei modelli, teoria della dimostrazione)
- Semantica formale (linguistica, filosofia del linguaggio)
- Informatica teorica (linguaggi formali, verifica)
- Fondamenti della matematica (teoria degli insiemi, teoria dei tipi)

Ragioni del Successo:

1. **Rigore**: Matematicamente precisa e verificabile
2. **Generalità**: Applicabile a vastissima classe di linguaggi formali
3. **Fecondità**: Ha generato ricerca in innumerevoli direzioni
4. **Intuizione**: Cattura l'intuizione di base (verità = corrispondenza) in modo formale
5. **Utilità**: Strumento pratico per analizzare linguaggi, sistemi, teorie

11.5.2 Sfide Contemporanee

1. Era Digitale: Con proliferazione di informazione (web, social media), distinguere verità da falsità è cruciale. Servono strumenti formali scalabili.

2. AI e Autonomia: Sistemi autonomi (auto, droni, robot) devono "comprendere" verità su mondo per agire correttamente. Servono rappresentazioni semantiche robuste.

3. Post-Truth Culture: In era di "alternative facts", la concezione oggettiva tarskiana di verità è più rilevante che mai come standard.

4. Scienza Interdisciplinare: Integrazione di domini richiede semantiche formali comuni (bioinformatica, computational social science, etc.).

11.5.3 Lezioni Metodologiche

1. Rigore senza Pedanteria: Tarski mostrò che rigore matematico non sacrifica rilevanza filosofica/pratica.

2. Formalizzazione Illuminante: Formalizzare problemi filosofici può dissolverli, trasformarli, o mostrarne la profondità insospettata.

3. Limiti Costruttivi: Risultati negativi (indefinibilità) sono informativi quanto positivi, rivelando struttura dello spazio logico.

4. Interdisciplinarità: Il lavoro migliore spesso attraversa confini (logica, filosofia, matematica, informatica).

11.6 Valutazione Finale

La teoria della verità di Alfred Tarski rappresenta un **monumento intellettuale** del XX secolo. Non è semplicemente una teoria tecnica in logica matematica, ma un contributo fondamentale alla comprensione umana del linguaggio, del significato e della realtà.

Punti di Forza:

1. **Soluzione ai Paradossi**: Risolve elegantemente i paradossi semantici che avevano afflitto la logica per millenni
2. **Fondazione della Semantica**: Fornisce fondamenta rigorose per tutta la semantica formale moderna
3. **Intuizione e Rigore**: Bilancia perfettamente intuizione filosofica e precisione matematica
4. **Fecondità**: Ha generato sviluppi in decine di campi diversi
5. **Durabilità**: Dopo 90 anni, rimane framework dominante e insuperato

Limitazioni:

1. **Non Universale**: Non fornisce teoria della verità per "tutto" linguaggio, ma solo per linguaggi formalizzati
2. **Non Riduttiva**: Non riduce verità a concetti non-semantici, quindi non "naturalizza" completamente
3. **Presupposizioni**: Richiede metalinguaggio e nozione di riferimento già compresi
4. **Classicalità**: Profondamente classica (bivalente), richiede modifiche sostanziali per logiche non-classiche

Significato Storico:

Tarski trasformò la logica da studio della dimostrazione (sintassi) a studio di strutture e verità (semantica). Questo shift ha avuto impatto profondissimo:

- **Prima di Tarski**: Logica = calcolo formale, manipolazione di simboli
- **Dopo Tarski**: Logica = studio di relazioni tra linguaggio e realtà/strutture

La teoria dei modelli, nata dal lavoro di Tarski, è ora una delle aree più profonde e belle della matematica, con connessioni a algebra, geometria, teoria dei numeri.

Prospettiva Filosofica:

Filosoficamente, Tarski mostrò che il concetto di verità non è misterioso o metafisicamente problematico. È un concetto preciso, matematizzabile, che può essere studiato scientificamente. Questo ha liberato l'epistemologia e la filosofia del linguaggio da dibattiti sterili, permettendo progresso cumulativo.

Contemporaneamente, il teorema di indefinibilità mostra che ci sono limiti intrinseci: non possiamo avere trasparenza semantica completa. Questo ha profonde implicazioni per comprensione di auto-riflessione, coscienza, auto-conoscenza.

Conclusione:

La teoria della verità di Tarski non è l'ultima parola sulla verità. Non risolve tutti i problemi filosofici, non si applica immediatamente a tutta la complessità del linguaggio umano, non elimina ogni mistero. Ma rappresenta un progresso enorme, un chiarimento concettuale di valore inestimabile.

Come Newton per la fisica o Darwin per la biologia, Tarski ha trasformato il nostro campo. La semantica pre-tarskiana era pre-scientifica. La semantica post-tarskiana è una scienza matura con risultati precisi, applicazioni pratiche, e comprensione profonda.

Per chiunque voglia comprendere il linguaggio, il significato, la verità, la logica – la teoria di Tarski è fondamentale. Non solo per il suo contenuto tecnico, ma per la sua dimostrazione che i problemi più profondi e astratti della filosofia possono essere affrontati con rigore matematico mantenendo la loro rilevanza e profondità.

È questo connubio di profondità filosofica e precisione matematica che rende la teoria della verità di Tarski uno dei grandi successi intellettuali dell'umanità.

Bibliografia Completa e Annotata

Opere Principali di Tarski

Tarski, A. (1933). "Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych" [Il Concetto di Verità nei Linguaggi delle Scienze Deduttive], *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizycznych 34, Varsavia. Tradotto in tedesco come "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica*, 1: 261–405, 1936.

L'opera seminale dove Tarski introduce la definizione di verità, la Convenzione T, e dimostra il teorema di indefinibilità. Fondamentale per chiunque voglia comprendere la teoria alla fonte.

Tarski, A. (1944). "The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics", *Philosophy and Phenomenological Research*, 4: 341–376.

Esposizione divulgativa e difesa filosofica della teoria. Più accessibile del lavoro del 1933, risponde a obiezioni e chiarisce l'intento filosofico.

Tarski, A. (1956). *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, tradotto da J.H. Woodger, Oxford: Clarendon Press. Seconda edizione 1983, ed. J. Corcoran, Hackett.

Raccolta dei lavori fondamentali di Tarski, include la traduzione inglese del lavoro del 1933. Essenziale.

Tarski, A. (1941). *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*, Oxford University Press. Ristampato più volte.

Introduzione magistrale alla logica scritta da Tarski. Mostra la sua abilità pedagogica e chiarezza espositiva.

Teoria dei Modelli

Chang, C. C., & Keisler, H. J. (2012). *Model Theory*, 3rd edition, Dover Publications.

Trattato classico e completo di teoria dei modelli. Copre tutti i risultati fondamentali: compattezza, Löwenheim-Skolem, completezza, categoricità.

Marker, D. (2002). *Model Theory: An Introduction*, Springer.

Introduzione moderna molto chiara. Eccellente per studenti graduati.

Hodges, W. (1993). *Model Theory*, Cambridge University Press.

Trattato enciclopedico, copre sia teoria classica che sviluppi moderni. La risorsa definitiva.

Hodges, W. (2014). "Tarski's Truth Definitions", *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, E. Zalta (ed.).

Analisi dettagliata e precisa della teoria di Tarski da parte di uno dei maggiori esperti di teoria dei modelli.

Filosofia della Verità

Davidson, D. (1967). "Truth and Meaning", *Synthese*, 17: 304–323.

Proposta influente di usare teoria tarskiana come teoria del significato. Ha generato enorme letteratura.

Field, H. (1972). "Tarski's Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 69: 347–375.

Critica importante: Tarski non fornisce riduzione fisicalista della verità. Discussione sofisticata dei limiti della teoria.

Kirkham, R. (1992). *Theories of Truth: A Critical Introduction*, MIT Press.

Ottima panoramica di tutte le teorie filosofiche della verità, con attenzione a Tarski.

Horwich, P. (1998). *Truth*, 2nd edition, Oxford University Press.

Difesa del minimalismo deflazionista sulla verità. Interpreta Tarski in chiave deflazionista.

Lynch, M. (2009). *Truth as One and Many*, Oxford University Press.

Difesa del pluralismo aletico. Argomenta che ci sono diverse specie di verità per domini diversi.

Paradossi e Autoreferenzialità

Kripke, S. (1975). "Outline of a Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 72: 690–716.